UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

FUNÇÃO: CONCEPÇÕES E ESTRATÉGIAS DE ESTUDANTES DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NA EXPLORAÇÃO DE TABELAS

SARAI OLIVEIRA SILVA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FUNÇÃO: CONCEPÇÕES E ESTRATÉGIAS DE ESTUDANTES DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NA EXPLORAÇÃO DE TABELAS

SARAI OLIVEIRA SILVA

Sob a orientação da professora
Dra. Dora Soraia Kindel

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática** no Curso de Pós-Graduação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586f

Silva, Sarai Oliveira, 1971-
Funções: concepções e estratégias de estudantes da 1ª série do Ensino Médio na exploração de tabelas / Sarai Oliveira Silva. - 2017.
60 f.: il.

Orientadora: Dora Soraia Kindel.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2017.

1. Concepções. 2. Análise de tabelas. 3. Tarefas familiares. 4. Atividade em grupo. I. Kindel, Dora Soraia , 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SARAI OLIVEIRA SILVA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática** no curso de pós-graduação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM: 31/08/2017

EXAMINADORES

____
Dora Soraia Kindel. Doutora. UFRRJ
(Orientadora)

____
Andreia Maciel Barbosa. Doutora. UERJ/CPII

____
Marco Antonio de Moraes. Doutor. UFRRJ

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, meu refugio e fortaleça.

Agradeço ao meu pai Pedro, minha irmã Alessandra, meus filhos Daniel e Gabriella, por todo incentivo, apoio e compreensão.

Agradeço a minha orientadora Dora Soraia Kindel, pela sua generosidade e confiança, por todo conhecimento compartilhado, e principalmente por não desistir de mim e nem do nosso projeto. Foi um período de muito aprendizado. Soraia, minha gratidão!

Agradeço aos professores Andreia Maciel Barbosa e Marco Antonio de Moraes, que tanto na qualificação quanto na defesa, com suas sugestões, críticas e apontamentos contribuíram muito para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os professores do programa PPGEduCIMAT, que generosamente se propuseram a nos auxiliar nesta jornada, de modo especial o professor Marcelo Almeida Bairral, tanto pelas caronas quanto pela boa conversa, pelas dicas e pelos conselhos.

Agradeço aos colegas da primeira turma do Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, da qual orgulhosamente fiz parte. Pessoas amigas, acolhedoras e muito dispostas a ajudar e compartilhar. Foi sem dúvidas uma experiência gratificante conviver com todos. De modo particular agradeço a Daniela, a Luciana e a Marcos por todas as palavras de apoio e incentivo, além das dicas valiosas. Obrigada!

Agradeço a querida Adriene, companheira nesta jornada, e em quem encontrei também uma amiga e confidente.

Agradeço aos diretores da escola na qual trabalho, bem com a equipe de coordenadores e professores, e, principalmente, aos meus alunos e seus responsáveis, pela confiança e pelo apoio, ambos vitais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Pedro, meu neto amado, tão esperado, que chegou trazendo muita luz e paz, o que fez toda diferença neste momento tão importante.

UM BREVE MEMORIAL

Minha trajetória como professora de Matemática na Educação Básica teve início no ano de 2005, na Educação de Jovens e Adultos (E.J. A). Ao longo desse tempo, que já dura 12 anos, tenho trabalhado, também, na modalidade de ensino Regular, tanto com estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental quanto da 1ª a 3ª série do Ensino Médio.

Formada pela Faculdade de Formação de Professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, comecei a trabalhar como professora de Matemática quando ainda frequentava a licenciatura. Essa experiência muito contribuiu para alicerçar minha formação inicial e mostrar-me que, apenas com ela, eu não estaria em condições de lidar com os constantes desafios que se apresentam a nós professores à frente de uma sala de aula, tendo que lidar com pessoas que pensam e agem de formas distintas das nossas. A tarefa de ensinar e dar-lhes apoio para que compreendem os conteúdos da disciplina tida como uma das mais, senão a mais difícil pelos estudantes, mas também atender à demandas externas, como por exemplo, avaliações externas, currículo, violência, entre outros tem sido um grande desafio.

O interesse em compreender melhor esta realidade, sala de aula, e os atores principais dessa realidade, os estudantes, foi o que me moveu a ingressar no mestrado. Espero com ele poder colaborar com outros professores, instigando-lhes a buscarem compreender melhor a própria realidade, sua sala de aula.

Finalizo com uma citação de Rômulo Lins (1999), na qual o autor enfatiza a importância de buscarmos conhecer melhor, esses para os quais se encaminham toda ação docente, os estudantes.

> *Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (RÔMULO LINS 1999, p.85)*

RESUMO

SILVA, Sarai Oliveira. **Função: concepções e estratégias de estudantes da 1ª série do ensino médio na exploração de tabelas: Seropédica, RJ**. 2017. 60p Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Departamento de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

Esta pesquisa analisa as respostas dadas por estudantes da 1ª série do Ensino Médio acerca da elaboração de tabelas, com exemplos prototípicos de funções, em um ambiente colaborativo, em que os estudantes trabalhavam em duplas ou em grupos de no máximo três integrantes. Para o desenvolvimento desta pesquisa nos apoiamos no Experimento de *Design*, sobre o qual estabelecemos um quadro de ensino e de aprendizagem de funções para esse grupo. O ponto de partida foram ideias preconcebidas sobre o conceito de função e sobre as operações no conjunto dos números inteiros, Z. O conjunto de tarefas familiares e não convencionais, elaboradas para introdução do tema, partiu de operações em Z. Estas tarefas e o registro das respostas escritas dos estudantes são o nosso instrumento de coleta e análise de dados. A análise das respostas nos revelou que muitos estudantes chegam ao Ensino Médio sem conhecimento de que o termo função é também usado para designar um conceito matemático, que a noção de função dos estudantes está associada à ideia de fazer contas e que para alguns, função é a própria conta. Como produto resultante desta pesquisa, apresentamos um guia didático para o professor, contendo sugestões de tarefas para o estudo de funções, cujo ponto de partida são algumas das ideias preconcebidas dos estudantes sobre função.

Palavras-chave: Concepções, análise de tabelas, tarefas familiares, atividade em grupo.

ABSTRACT

SILVA, Sarai Oliveira. **Função: concepções e estratégias de estudantes da 1ª série do ensino médio na exploração de tabelas: Seropédica, RJ**. 2017. 60p Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Departamento de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

This research analyzes answers given by students of the first grade of High School about the elaboration of tables with prototypical examples of functions in a collaborative environment in which the students worked in pairs or groups of no more than three members. The development of this research was based on the Design Experiment on which we established the Theoretical Methodological foundation that also served to establish a framework of teaching and learning of functions for this group. The starting point was the preconceived ideas about the concept of function and about operations on the set of integers, Z. The set of familiar, but unconventional tasks to introduce the theme originated from this central idea, operations in Z. These tasks and the recording of students' written responses are our instrument of data collection and analysis. That is, the students needed to explain or justify the procedures used. The analysis of the answers has revealed that many students come to High School without knowing that the term function is also used to designate a mathematical concept; that the notion of function for them becomes the idea of "making calculations" and that for some students, function is the calculation itself. Based on the considerations above, we believe that the challenge is to think how to intervene in the classroom so that the student is given the opportunity to review his notions and broaden his vision of the concept of function. As a result of this research, we present a didactic guide for teachers containing suggestions of tasks for the study of functions starting from some of the preconceived ideas.

Keywords: conceptions, analysis of tables, familiar tasks, group activity

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho procuramos analisar como estudantes, do Ensino Médio, pensam o conceito de função. De modo particular, investigamos quais são as suas concepções sobre esse conceito, que atualmente é concebido como uma relação entre conjuntos, mas que, historicamente, já foi concebido como quantidades variáveis, expressão analítica, transformação e aplicação.

A investigação foi realizada com estudantes de três turmas da primeira série do Ensino Médio, regular, de uma escola pública da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada na região metropolitana do estado.

O estudo se insere na linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Segurado e Ponte (1998) relatam que vários pesquisadores a têm enfatizado a importância do estudo das concepções dos estudantes sobre a matemática, sobre a aprendizagem da matemática ou sobre os conceitos matemáticos, e que vários são os estudos que fazem referência ao assunto, revelando aspectos de como as concepções dos estudantes interferem, por vezes negativamente, no seu comportamento frente à Matemática. Para os autores, os professores devem não só tomar ciência da existência das concepções dos estudantes, como também procurar meios para que os estudantes reflitam sobre essas concepções.

Para Ponte (1992), as concepções agem de modo determinante sobre o pensamento e a ação, pois "constituem a forma como organizamos os conceitos, vemos o mundo, e pensamos"; Do ponto de vista do autor, as concepções são essenciais pois "estruturam o sentido que damos às coisas", mas também requerem atenção uma vez que podem chegar a atuar "como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e de compreensão" (PONTE, 1992, p.1).

Sobre o processo de formação das concepções, Ponte (1992) escreve que as concepções formam-se num processo simultaneamente individual, como resultado da elaboração sobre a nossa experiência, e social, como resultado de confronto das nossas elaborações com as dos outros. No que diz respeito às concepções sobre a matemática, o autor acredita que sejam, principalmente, "influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes" (PONTE, 1992, p.1).

Para Ana Paula Mourão (2002), a visão que cada um tem de um determinado conceito, definição matemática, ou mesmo de uma expressão algébrica, "depende não só do contexto da situação ou problema em que ela surge mas também do que somos capazes, no momento, de perceber" (MOURÃO, 2002, p. 277).

Nessa perspectiva, entendemos que estamos dando um primeiro passo nesta direção procurando conhecer como os estudantes concebem o conceito de função, entendemos que investigar como os estudantes concebem certos conceitos matemáticos pode oferecer maior subsídio aos professores, no momento de planejarem suas aulas, elaborarem ou proporem tarefas e avaliarem o conhecimento construído pelo estudante.

O nosso interesse em investigar as concepções dos estudantes, sobre função, decorre destas questões pontuadas, da importância do tema para a formação matemática dos estudantes e pela percepção, com base em nossa experiência profissional, de que os estudantes concluem a Educação Básica sem compreenderem corretamente o conceito de função.

A inserção do tema função entre os temas a serem abordados no ensino secundário, de acordo com Braga (2006), está diretamente relacionada com a implantação da Matemática na grade de disciplinas do curso secundário. O autor relata que a Matemática, enquanto disciplina escolar, foi instituída no Brasil na primeira metade do século XX, a partir da unificação de três outras disciplinas escolares daquela época: Álgebra, Aritmética e Geometria. Implantada primeiro no curso secundário do Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, no ano de 1929, e posteriormente nas demais escolas do país, a partir de uma portaria ministerial publicada em 30 de junho de 1931, a nova disciplina tinha a função de promover no Brasil concepções de um movimento reformista internacional, do ensino de matemática, no secundário, cujas ideias já vinham sendo difundidas e adotadas também em outros países.

O autor esclarece que esse movimento em prol da modernização do ensino de matemática no então secundário, ocorrido no início do século XX, tinha suas raízes principalmente na Alemanha, na Inglaterra, na França e nos Estados Unidos e que um de seus principais líderes era o matemático prussiano-alemão Christian Felix Klein (1849 – 1925), cujas ideias para a reforma do ensino da Matemática no secundário destacavam:

> Introduzir noções do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos da escola secundária;
> Incluir o conceito de função com o papel de ideia coordenadora dos diversos assuntos da matemática escolar;
> Procurar desenvolver o pensamento funcional do aluno desde as séries iniciais;
> Fomentar as conexões entre as diversas partes da matemática (BRAGA, 2006, p.57).

Embora essas ideias não tenham vingado de todo, elas deixaram um legado. Passado mais de oitenta anos, a noção de função continua desempenhando um papel importante no Ensino Médio, como mostram as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+(2002).

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das Ciências, necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2002, p. 121).

Pesquisas recentes têm revelado que o ensino de funções ainda se encontra muito aquém dessas expectativas. Rezende *et al* (2012), por exemplo, apontam que na educação básica "tem se negligenciado a exploração de aspectos dinâmicos no ensino das funções reais", e [que] a noção de função vem sendo estabelecida não no contexto da variabilidade, mas em termos de correspondência estática entre os valores de "x" e de "y" (REZENDE *et al*, 2012, p.74 -76).

Pires e Silva (2015) afirmam, que, embora vários aspectos inerentes ao ensino e à aprendizagem do conceito de função já tenham sido tratados em diversas pesquisas, ainda há muitos outros que precisam ser investigados, pois o tema função ainda 'apresenta déficit de aprendizagem' de acordo com os relatórios de macro avaliações realizadas no país.

Para Pires (2014), que investiga as concepções de função, de estudantes e de professores de Matemática, "existe muita coisa a ser explorada a respeito das concepções de professores e estudantes no que se refere ao conceito de função" (PIRES, 2014, p. 391).

Esperamos, com este trabalho, contribuir para desvelar mais aspectos a respeitos das concepções dos estudantes acerca do conceito de função.

Dito isso, apresentamos, a seguir, a questão e os objetivos que movem esta pesquisa.

1.1 Questão de Pesquisa

Como estudantes do Ensino Médio pensam o conceito de função? Quais são suas concepções a respeito das funções?

Para tentar responder a essas questões, foram definidos os seguintes objetivos:

1.2 Objetivo Geral

- Identificar concepções de estudantes do Ensino Médio sobre função.

1.3 Objetivos Específicos

- Identificar os significados atribuídos ao termo função pelos estudantes investigados, antes de uma primeira abordagem do tema nas aulas de Matemática, na 1ª série do Ensino Médio.
- Verificar quais as estratégias usadas pelos estudantes para completar as tabelas das funções $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ e $y = \text{sen}(x)$, exemplos prototípicos das funções estudadas no Ensino Médio.
- Examinar a definição de função elaborada pelos estudantes ao término do ano letivo.

Cabe esclarecer que o termo “estratégia”, tal como o empregamos neste trabalho, refere-se ao conjunto de ações ordenadas e dirigidas para um fim, conforme definição apresentada por Zaballa (1999).

1.4 Estrutura da Dissertação

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro, buscamos apresentar uma visão geral da pesquisa, a justificativa para a sua realização, bem como a questão e os objetivos que a movem. Nele também apresentamos a organização dos capítulos da dissertação.

No segundo capítulo, procuramos apresentar o aporte teórico da pesquisa, que foi construído levando-se em consideração: a definição de concepção em diferentes contextos; as reflexões de vários autores sobre o papel desempenhado pelas concepções (em geral, sobre a Matemática ou sobre os conceitos matemáticos) no pensamento e na ação dos indivíduos; a concepção de função em diferentes momentos entres os séculos XVIII e XX; a definição de função apresentada nos livros destinados a professores e a professores e estudantes do Ensino Médio e Fundamental; o que motivou a inserção do tema função no programa de matemática do ensino secundário brasileiro. Além de orientações para o ensino de função na Educação Básica, presentes em dois documentos curriculares vigentes, os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo Mínimo[1]. Todos esses pontos, cabe ressaltar, auxiliaram-nos nas análises e discussões levantadas neste trabalho, bem como nas decisões quanto a como conduzir a pesquisa de campo.

[1] Documento que serve como referência a todas as escolas da rede pública de ensino do Rio de Janeiro sob à tutela da Secretaria de Estado e Educação (SEEDUC) e que orienta sobre os itens que não podem faltar no processo de ensino-aprendizagem, em cada disciplina, ano de escolaridade e bimestre. O documento encontra-se disponível para consultada na página da SEEDUC/RJ na internet.

No terceiro capítulo, são apresentados: a metodologia utilizada na pesquisa, *Design-Based Research* (DBR), os procedimentos adotados, os instrumentos usados na coleta e análise dos dados, bem com o local em que foi realizada e os sujeitos que foram investigados.

No quarto capítulo, discorremos sobre a pesquisa de campo, sobre como se deu a sua realização, quais foram as atividades realizadas, quais foram os dados coletados e como procedemos na análise desses dados. Mediante a apresentação de cada atividade, apresentamos também a análise dos dados obtidos, à luz do referencial teórico da pesquisa, e de modo a responder a questão de pesquisa que é como os estudantes investigados pensam o conceito de função.

No quinto capítulo são apresentadas as considerações finais e exposto o nosso ponto de vista sobre o estudo realizado.

2 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos o resultado de uma revisão de literatura, no qual se aporta teórica e metodologicamente o estudo. Realizada com o intuito de identificar pontos que seriam interessantes para o nosso projeto de pesquisa, foi orientada a busca de trabalhos de outros autores que pudessem subsidiar o nosso; portanto, trata-se de algo direcionado e cujo enfoque foi a aquisição de mais conhecimento acerca do tema abordado — função — e acerca do assunto que é discutido: o das concepções dos estudantes.

O primeiro passo foi pesquisar a definição de concepção em diferentes contextos. Depois nos inteiramos sobre as reflexões e pareceres de diferentes autores sobre o papel desempenhado pelas concepções (em geral, sobre a Matemática e sobre os conceitos matemáticos) no pensamento e na ação dos indivíduos, sobre as diversas concepções de função entre os séculos XVIII e XX, sobre a definição de função apresentada nos livros de professores e de professores e estudantes do Ensino Médio e Fundamental, sobre o porquê de o tema função ter sido inserido no programa de Matemática do ensino secundário brasileiro, e sobre as orientações atuais para o ensino de função na Educação Básica. Todos esses pontos, é importante mencionar, nos auxiliam nas análises e discussões levantadas no trabalho.

No livro “Introdução ao projeto de pesquisa científica”, Rudio (2007) escreve que a definição dos termos é algo útil e necessário e não só a elaboração e execução projetos de pesquisas, como também a comunicação de seus resultados e a elaboração dos próprios pensamentos, por parte do pesquisador. Ressaltando que um dos principais objetivos da definição na pesquisa é ajudar na *observação da realidade* (RÚDIO, 2007, p. 33, grifo do autor).

Com base nesse pressuposto, nós procuramos conhecer algumas acepções para o termo concepção. Para tanto, consultamos dois léxicos da língua portuguesa e um da filosofia, além de dois artigos da área da Educação Matemática. O resultado é apresentado a seguir.

2.1 A Definição de Concepção em Diferentes Contextos

De acordo com o Dicionário Larrousse Cultural (1992), a palavra “concepção” deriva do latim, *conceptio*, que se refere à ação de conter. As acepções apresentadas, para o termo, neste léxico são:

1. Ação pela qual um ser é concebido, gerado; geração;
2. O ato de conceber ou criar mentalmente;
3. Noção, ideia, conceito.

No léxico, também é informado que, no campo da Biologia, concepção refere-se ao encontro do óvulo (gameta feminino) com o espermatozoide (gameta masculino) durante a reprodução de seres sexuados, com geração do ovo ou zigoto, uma primeira versão do embrião.

No Minidicionário Houaiss (2004), as definições apresentadas para o termo concepção são:

1. Fecundação de um óvulo;
2. Produção intelectual; teoria; criação;
3. Compreensão, percepção;

4. Ponto de vista, opinião.

Já o Dicionário Básico de Filosofia, cujo intuito, seus organizadores informam, é oferecer de forma despretensiosa uma visão filosófica dos conceitos, traz além de uma breve referência à procedência do termo — informando que concepção deriva de *conceptio*, do latim — duas definições para concepção:

1. Operação pela qual o sujeito forma, a partir de uma experiência física, moral, psicológica ou social, a representação de um objetivo do pensamento, ou conceito;
2. Operação intelectual pela qual o entendimento forma um conceito.

Os autores informam que, ao resultado da primeira operação, também considera-se concepção e que, nesta perspectiva, torna-se "praticamente sinônimo de teoria" (JAPIASSU E MARCONDES, 2007, p. 51).

Para alguns autores, no entanto, definir concepção não é algo que considerem fácil. Segurado e Ponte (1998), por exemplo, dizem que "definir concepção é difícil" e Guimarães (2010) acusa a mesma dificuldade, porém alegando que isso se deve ao fato de o seu significado ser algo que escapa com facilidade.

A despeito da dificuldade que acusa, Guimarães (2010) procura apresentar no artigo "Concepções, Crenças e Conhecimento — afinidades e distinções essenciais", o seu entendimento e o de outros autores, quanto ao que vem a ser "concepção".

Para o autor "à noção de concepção podemos associar um sentido de construção ou criação de algo", num ato a que prestam concurso, simultaneamente, tanto elementos interiores a pessoa, quanto exteriores a ela e pertencentes à coisa (GUIMARÃES, 2010, p.84).

John Dewey, o autor escreve, que associava fortemente o conceito de função com o conceito de significado, considerando "qualquer significado padrão" ou "qualquer significado suficientemente individualizado para ser diretamente captado e prontamente utilizado e assim fixado por uma palavra" como uma concepção (*apud* GUIMARÃES, 2010, p.85).

Já Alba Thompson, de acordo com o autor, concebe concepção em termos de estruturas mentais e que compreendem desde crenças e significados, até conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências e noções de semelhança (GUIMARÃES, 2010, p.85).

A compreensão de concepção de Alba Thompson também é mencionada por Segurado e Ponte (1998) no artigo "Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo", onde os autores também discutem a compreensão de concepção de Schoenfeld (1992) e a de Ponte (1992).

Os autores dizem que "para Ponte (1992) as concepções podem ser entendidas com um substrato conceptual que desempenha um papel fundamental em todo o pensamento e ação, fornecendo meios de ver o mundo e de organizar os conceitos" (SEGURADO E PONTE, 1998, p. 7).

Sobre a noção de concepção de Schoenfeld (1985,1992), os autores dizem trata-se de algo um pouco mais elaborado e que indica que, na visão do autor, "as concepções não operam individualmente, mas [sim] fazem parte de um sistema" (SEGURADO E PONTE, 1998, p. 7).

É importante salientar que a noção de concepção de Schoenfeld (1985) a que se referem os autores, no artigo, dizem respeito à forma como este autor enuncia as concepções das pessoas sobre a Matemática. A respeito dessas concepções Schoenfeld (1985) escreveu:

> Um sistema de concepções é a visão que uma pessoa tem do mundo matemático, a perspectiva com a qual a pessoa aborda a Matemática e as tarefas matemáticas. As concepções da pessoa sobre a Matemática podem determinar de que modo ela decide abordar um problema, que técnicas usará ou evitará, quanto tempo e esforço dedicará ao problema, etc. As concepções estabelecem o contexto dentro do qual operam os recursos, as heurísticas e o controlo (SCHOENFELD, 1985, p. 45 *apud* SEGURADO E PONTE, 1998, p. 7).

2.2 As Reflexões de Diferentes Autores sobre as Concepções

Ponte (1992) revela que o seu interesse pelo estudo das concepções de grupos humanos, em geral, incluindo estudantes, professores de Matemática e outros profissionais, se baseia no pressuposto de que as concepções são dotadas de um "substrato conceitual que joga um papel de determinante no pensamento e na ação" (PONTE, 1992, p. 1). Para o autor, esse substrato não se refere propriamente a conceitos específicos, mas a forma como os indivíduos organizam esses conceitos, enxergam o mundo e concebem seus pensamentos.

Para ele, as concepções são resultado tanto da elaboração do indivíduo sobre as próprias experiências quanto do confronto de suas elaborações com as dos outros, o que faz do processo de formação das concepções, em sua opinião, um processo ao mesmo tempo individual e social.

A respeito de como agem as concepções, o autor escreve:

> Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão (PONTE, 1992, p. 1).

Parece-nos que o autor quer dizer, com isso, que as concepções, ao mesmo tempo em que prestam inestimável auxílio ao indivíduo, também podem gerar grandes transtornos para ele. Daí a importância de estarmos atentos a elas.

O autor que investigou concepções de professores de Matemática sobre essa ciência e como estas concepções influenciam suas práticas, diz que 'a Matemática é um assunto sobre o qual é dificil não ter concepções', e que nossas conepções a respeito dessa ciência (e que nós comprendemos que também se aplique a Matemática enquanto disicplina escolar) são tanto influenciadas 'pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal' quanto pelas 'representações sociais dominantes'. "Para alguns", o autor escreve, 'salienta-se o seu aspecto mecânico, inevitavelmente associado ao cálculo'(PONTE, 1992, p.1).

O autor considera que "mudanças profundas no sistema de concepções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilibrios", o que pode resultar num processo difícil e penoso, com as pessoas oferecendo resistência natural a ele (PONTE, 1992, p. 27).

Ponte (1992) alerta que o estudo de concepções pode se deparar com sérios problemas metodológicos tanto porque as pessoas não costumam sentir-se a vontade ao se expor, quanto porque sentem dificuldade em se expressar a respeito de assuntos sobre os quais habitualmente não pensam de uma forma muito reflexiva. Por isso, recomenda, ao pesquisador interessado em investigar concepções, lançar mão da criatividade: "Recorrendo a entrevistas, mais do que fazer perguntas directas, é preciso propor tarefas, situações e questões indirectas mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciar-se" (PONTE, 1992, p. 35)

O autor ainda ressalta que,

> [...] compreender as realidades do mundo dos que vivem o dia a dia das escolas é uma condição indispensável para a transformação dessas realidades; [...] [e que o] esforço de compreensão, desenvolvido de forma cooperativa e articulada com os próprios interessados, e projectado de forma mais ampla na sociedade, poderá ter importantes consequências na evolução do sistema educativo (PONTE, 1992, p. 37).

Num artigo que escreve em conjunto com Ponte, Segurado (SEGURADO E PONTE, 1998), revela que muitos autores têm destacado a importância do estudo das concepções dos estudantes, dentre eles Ken Winograd (1991), Joe Garofalo (1989) e Alan H. Schoenfeld (1985).

Os autores escrevem que, para Garofalo (1989), a importância das concepções reside no fato de elas influenciarem a forma como os alunos pensam e abordam e resolvem as tarefas matemáticas, bem como estudam e como participam nas aulas. E que para Winograd (1991) ela reside no fato de que o desempenho dos alunos nas tarefas escolares tem mais a ver com as suas concepções do que com a aprendizagem de conceitos, processos e estratégias (SEGURADO E PONTE, 1998).

Os autores dizem que "a mesma ideia é ainda apontada por Schoenfeld (1983)", referindo-se a seguinte fala do autor:

> [...] as acções cognitivas perceptíveis produzidas pelos [nossos alunos], são muitas vezes resultado de concepções, consciente ou inconscientemente mantidas acerca de: (a) tarefa em mão, (b) ambiente social dentro do qual a tarefa tem lugar, (c) a autopercepção individual da resolução da tarefa e a relação entre esta e o ambiente (SCHOENFELD, 1983, *apud* SEGURADO E PONTE, 1998, p.7).

Os autores escrevem que, para Denise A. Spangler (1992), a relação que existe entre as concepções e a aprendizagem traz para o centro desse debate a questão de como o professor pode explorar essa relação. Afirmam também que ele defende que o professor deve avaliar as concepções que os estudantes têm acerca da Matemática e, com base nessa informação, planejar suas aulas e organizar seu ambiente de trabalho. Em continuação, que para Raffaella Borasi (1990), o professor deve criar situações de aprendizagem que levem os estudantes a serem conscientes de suas percepções da Matemática e de as questionarem.

Segurado e Ponte (1998) afirmam que para Garofalo (1989) o ensino da Matemática precisa provocar mais o estudante, encorajando-os a "explorarem tópico; desenvolver e refinar as suas próprias ideias, estratégias e métodos; e refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos" (GAROFALO, 1989, *apud* SEGURADO E PONTE, 1998, p.10).

Guimarães (2010), outro autor que traz importantes contribuições para este trabalho, revela-nos que, para John Dewey, noção e concepção referem-se à mesma coisa. O autor também revela que para Dewey "qualquer "significado padrão" (*standard meaning*) ou "qualquer significado suficientemente individualizado para ser diretamente captado e prontamente utilizado, e assim fixado por uma palavra, é uma concepção" "(GUIMARÃES, 2010, p. 85, aspas do autor).

O autor explica que, no entanto, Dewey rejeita a ideia de que as concepções se tratem de significados residuais, como aqueles se constituem a partir de confrontos dos indivíduos com objetos ou situações, visto considerar que a elaboração das concepções exige participação ativa desse indivíduo. Ele, à luz das próprias experiências, antecipa determinada interpretação dos objetos ou situações com os quais se defronta. E esta interpretação por vez é submetida ao crivo da experiência, que confirma ou refuta aquilo que foi suposto. E que decorre desse processo, na opinião de Dewey, o ganho de clareza e robustez das concepções.

Guimarães (2010) explica que considerando o processo de formação das concepções, Dewey entende a concepção como um significado que foi estabilizado. E que é esta estabilidade que lhe confere importância instrumental, haja vista que, por meio das concepções, os sujeitos tornam-se capazes de identificar ou distinguir as coisas e, a partir disso, conferir-lhes atributos e o enquadrá-las em determinadas categorias.

> Da estabilidade com que as concepções são estabelecidas decorre a sua importância que Dewey caracteriza por uma tripla qualidade instrumental, quando as apresenta como instrumentos de "identificação" (identification), de "suplementação" (suplementation) e de "sistematização" (placing in a system). Enquanto instrumentos de identificação, as concepções possibilitam-nos distinguir, por exemplo, um objecto de outros objectos e reconhecê-lo como membro de uma determinada classe de objectos. Uma vez realizada a identificação, as concepções, como instrumentos de suplementação, permitem que todo o património conceptual de que dispomos possa ser aplicado sobre esse objecto e que lhe atribuamos as qualidades dos objectos da classe a que pertence, mesmo que ainda não observadas. Por fim, como instrumentos de sistematização, as concepções permitem inserir o objecto identificado num sistema global de relações e de interacções com outros objetos (GUIMARÃES, 2010, p. 85, aspas do autor).

2.3 A noção de concepção operacional e concepção estrutural de Anna Sfard

De acordo com Anna Sfard (1991), historicamente, de dois tipos têm sido as concepção sobre os conceitos matemáticos: operacional, segundo a qual os conceitos são concebidos como o produto de certos processos ou identificados com os processos e estrutural, segundo a qual são concebidos como objetos reais ou como estruturas fixas, conforme explica Ana Paula Mourão (2002), no artigo "A teoria da reificação de Ana Sfard: O caso das funções".

"A teoria da reificação de Anna Sfard fundamenta-se numa perspectiva que considera ser possível conceber a maioria dos conceitos matemáticos de duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objectos, e operacionalmente, como processos" (SFARD, 1991, 1992; SFARD e LINCHEVSKI, 1994 *apud* MOURÃO, 2002, p. 276).

Mourão (2002, p. 276) escreve que essa perspectiva se constitui a partir de dois aspectos levados em consideração por Sfard (1991) ao elaborá-la: o ontológico, na medida em que contempla a "natureza das entidades matemáticas", e o psicológico, na medida em que contempla a questão do quanto, em que momento, estas entidades são "compreendidas pelo indivíduo cognoscente".

Mourão (2002) escreve também, que

> subjacentes a esta perspectiva, parecem estar preocupações de natureza educacional que se prendem com a tomada de consciência do longo e, eventualmente, doloroso processo individual de construção dos conceitos matemáticos" (MOURÃO, 2002, p. 276)

A autora explica que Sfard (1991), partindo do pressuposto de que a dificuldade que os estudantes manifestam face à Matemática parece superar a que manifestam face a outras disciplinas e que, portanto, tem que haver alguma coisa realmente especial e única no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático, foi buscar respaldo na Filosofia e na Psicologia da Matemática para analisar a questão. E que os resultados do seu estudo sugerem que essa dificuldade possa estar relacionada com a forma como se originam e desenvolvem os conceitos matemáticos.

Tendo analisado os antecedentes históricos do desenvolvimento dos conceitos matemáticos e os antecedentes psicológicos do curso do pensamento matemático na compreensão desses conceitos, Sfard (1991) conclui que ambos possuem paralelos e apresenta um modelo de desenvolvimento conceitual nos termos da dualidade processo-objeto observada, como explica Mourão (2002):

> Com base nesta dualidade processo-objeto e na análise de exemplos históricos, Sfard propõe um modelo de desenvolvimento conceptual onde a concepção operacional é a primeira a emergir, permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objetos matemáticos, (MOURÃO, 2002, p. 275).

No que tange ao processo de transição da concepção operacional para a concepção estrutural, a autora escreve:

> Esta transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases: (i) interiorização – os processos são realizados em objectos matemáticos já familiares; (ii) condensação – os processos anteriores transformados em unidades compactas; e (iii) reificação – é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objectos permanentes por direito próprio (MOURÃO, 2002, p. 275).

A figura 1 traz uma esquematização do modelo de formação de conceitos elaborado por Sfard (1991).

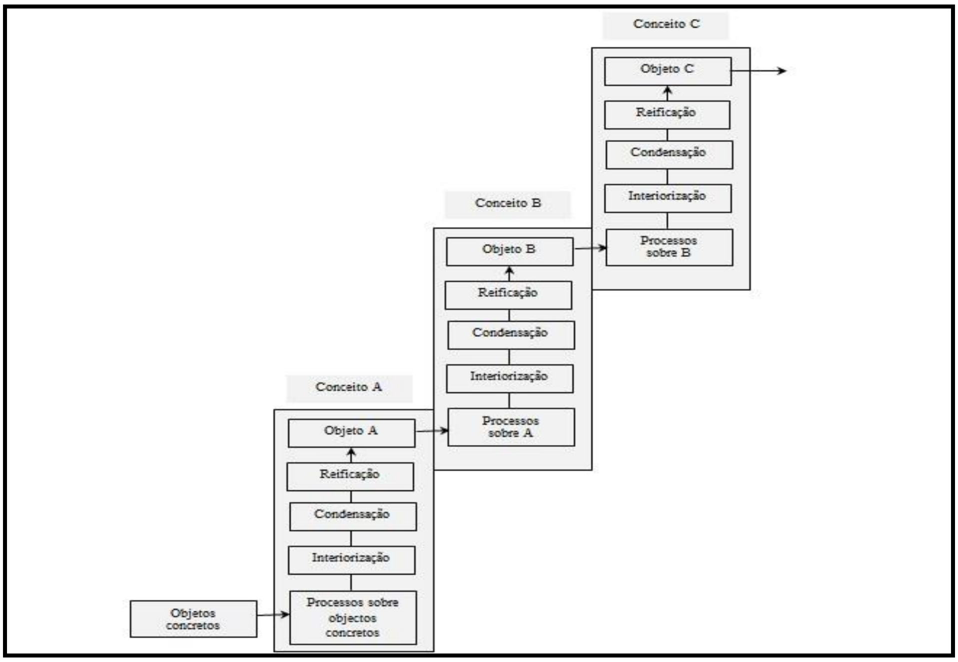


Figura 1: Modelo de formação de conceitos (SFARD, 1991, p.22)
Fonte: Mourão (2002, p. 285)

Como a figura ressalta, o esquema possui uma hierarquia, o que implica que não se ascende a uma fase se não por meio da fase imediatamente anterior a esta.

Em uma tentativa de explicar e ilustrar à aplicação do modelo proposto por Sfard (1991), a formação do conceito de função, Mourão (2002) diz que:

> Na primeira fase – interiorização -. [...] é aprendida a noção e variável e adquire-se a "capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável "dependente"".
>
> Na segunda fase – condensação – [se adquire] a capacidade de trabalhar com uma correspondência como um todo, sem necessidade de olhar para seus valores específicos. Eventualmente, o aluno estará apto a "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar o inverso de uma dada função" (MOURÃO, 2002, p. 283-284)

Mourão (2002) explica que o estudante só atinge a reificação do conceito de função, quando passa a compreendê-lo para além das suas representações (algébrica, tabular, analítica),

> [...] passando facilmente de uma representação a outra, quando for capaz de resolver equações funcionais [...], quando revelar capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição e inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções" (MOURÃO, 2002, p. 285).

A autora o número expressivo de estudantes que associam função a processos de cálculo, que parecem desconsiderar a função constante como um exemplo de relação funcional(porque mudanças na variável independente não ocasionam necessariamente mudanças na variável dependente), que relutam em aceitar como função "correspondências arbitrárias" (tão presos que estão a noção de que função necessariamente expressa uma regularidade que e é expressa por uma fórmula) e, ainda, que têm inclinação a identificar o conceito com alguma de suas representações, são elencados por Sfard é uma mostra da dificuldade dos estudantes em compreendê-lo em sua totalidade, um indicativo de.

Segundo Mourão (2002), para Sfard (1991), a reificação "é um processo bastante complicado que não está ao alcance de todos os alunos do ensino secundário" (MOURÃO, 2002, p. 286), por isso mesmo devemos incentivar os estudantes a reificação, mas não exigi-la até que de fato se torne necessário.

Neste trabalho assumimos que as concepções, tal como defende Thompson (1992 apud GUIMARÃES, 2010; SEGURADO E PONTE, 1998), englobam crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências e noções de semelhança desenvolvidas pelos sujeitos. Para a autora, a maneira como atuam as concepções (e que do nosso ponto vista destacam sua importância) as levam a desempenhar um papel que pode ser descrito como simultaneamente de interação e de mediação. Ou seja, nas diversas situações com as quais o sujeito se depara, as concepções interagem com os vários fatores relacionados aquelas situações, influenciando a forma como este reage a ela, além de atuarem como o filtro por intermédio do qual informações são processadas e interpretadas (GUIMARÃES, 2010, p.83).

Dito isso, prosseguimos abordando questões relacionadas ao desenvolvimento histórico do conceito de função e ao seu ensino.

2.4 Função: Questões Históricas e do Ensino

A necessidade do homem de lutar e de se proteger das intempéries da natureza e de exercer domínio sobre ela fez com que ele passasse a observá-la e a estudar seus fenômenos na tentativa de descobrir as causas, os efeitos e os encadeamentos desses fenômenos.

A observação foi responsável por mostrar ao homem que havia certos fenômenos que apresentavam regularidades, isto é, que existiam comportamentos previsíveis e que podiam ser reproduzidos desde que fossem recriadas as condições que lhe deram origem. E que essa descoberta foi fundamental. "Ora, *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza. Toda a técnica se baseia nisso [...]" (CARAÇA, 1951, p. 119). Os resultados desse estudo, adquirido e acumulado ao longo de séculos de vida consciente da Humanidade, é o que denominamos Ciência.

De acordo com o autor, o objetivo final da Ciência é formar **quadros ordenados e explicativos** dos fenômenos naturais, sejam eles do mundo físico ou do mundo humano; individual ou social, que permitam interpretação e previsão e que é tarefa do cientista observar os fenômenos e ordenar os resultados da sua observação num quadro explicativo cujas predições sejam confirmadas pela observação e pela experimentação. O autor ressalta, no entanto, que a Ciência não tem, **e nem pode ter**, a pretensão de descrever a realidade tal como ela é, e que o homem da ciência em nenhum momento pode declarar ter atingido 'a essência última da realidade' já que a legitimidade dos quadros que elabora dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação e que há, na História da Ciência, vários exemplos de quadros explicativos que foram renovados ou substituídos justamente por terem se tornado insuficientes ou por terem deixado de estar de acordo com a realidade.

> [...] a todo momento, atividade teórica (construção de quadros) e a atividade prática (observação e experimentação) estão não só colaborando, mas em ação-recíproca, que faz que nenhum esquema interpretativo esteja isento da substância real que o alimenta, que nenhuma experiência esteja desacompanhada da atividade racional que a inspira e orienta. E é esta ação recíproca, tantas vezes desconhecida ou desdenhada por certos homens de ciências e certos filósofos, que vai a todo o momento tecendo a Ciência, fazendo dela esse maravilhoso instrumento humano, instrumento de luta, sempre incompleto, constantemente aperfeiçoado (CARAÇA, 1951, p. 108).

A Realidade, de acordo com o autor, descobriu-se ser regida por dois diferentes tipos de leis: as que dizem respeito à variação de qualidade — leis qualitativas — e as que dizem respeito a variação de quantidades — leis quantitativas. Além disso, verificou-se que as duas leis eram importantes para a compreensão da realidade e que não havia como se obter explicação para a variedade na qualidade sem que se aprofundasse o estudo sobre a variação na quantidade. E é este fato que o autor aponta como a principal motivação para o desenvolvimento de um conceito matemático voltado para o estudo das leis quantitativas por traz de regularidades observadas em determinados fenômenos e, ainda, se criar um instrumento matemático próprio para tal tarefa. Vejamos alguns exemplos de leis:

> I - Cada planeta descreve em torno do Sol, uma elipse, da qual o sol ocupa um dos focos (1ª lei de Kepler);
> II - Para todo o gás existe uma temperatura, chamada temperatura crítica, acima da qual ele não pode ser liquefeito; logo que a temperatura desça abaixo da temperatura crítica, o gás pode liquefazer-se, submetendo-o a uma pressão conveniente.
> III - Entre dois corpos de massa m e m' desenvolve-se uma força atrativa que é diretamente proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância dos dois corpos (lei da gravitação de Newton) (CARAÇA, 1989, p. 120-121).

O autor classifica essas leis afirmando que: a primeira pode ser considerada como lei qualitativa, a terceira como lei quantitativa e a segunda, como lei qualitativa-quantitativa, pois a manutenção da qualidade "estado gasoso" está dependente de variações quantitativas de pressão e temperatura.

Para Caraça (1989), conceitos matemáticos surgem do interesse prático ou teórico: "o número natural surgiu da necessidade de contagem, o número racional, da medida, o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes" (CARAÇA, 1989, p. 125).

O processo lento e contínuo sobre as observações, o entendimento e as explicações sobre a Realidade, faz com que possa surgir o conceito matemático próprio para estudar aquele fenômeno específico — leis quantitativas. E a regularidade observada sobre essa lei quantitativa nos dá a primeira ideia dessa lei.

O conceito de função surge então no bojo dessa observação. Sua evolução histórica foi lenta, tendo sido necessários, aproximadamente, três séculos para aperfeiçoar a definição do conceito.

Para entendermos melhor esse processo evolutivo é necessário ter-se alguma noção a seu respeito. Assim, passamos a apresentar um breve relatado da evolução histórica do conceito de função no período compreendido entre do século XVIII e XX, isto é, desde que houve a primeira tentativa de se definir o conceito.

2.5 Diferentes Concepções de Função

De acordo com Zuffi (2001), parece não haver um consenso entre os autores quanto à origem do conceito de função, sendo que alguns acreditam que tenha ocorrido por volta do ano 2000 a.C., entre o povo Babilônio, cujo legado deixado inclui "tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas", que, como aponta , eram construídas para fins práticos.

Souza e Mariani (2005) explicam que para Youschkevith (1976) o desenvolvimento do conceito de função atravessou três períodos da história da humanidade: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno.

Antiguidade: nessa época verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e funções; Idade Média: época em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, porém ainda prevalecendo as descrições gráficas ou verbais; Período Moderno: a partir do século XVI e especialmente durante o século XVII, começam a prevalecer às expressões analíticas de função, sendo que o método analítico de introdução à função revoluciona a matemática devido a sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas (SOUZA E MARIANI, 2005).

Para Ponte (1990), no entanto, embora aspectos muito simples do conceito de função possam ser encontrados em épocas remotas, é somente a partir do final do século XVII, que função surge, de fato, como "um conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em Matemática". De acordo com o autor, a origem de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal, surgindo de forma um tanto confusa nas noções "fluentes" e "fluxões" de Newton.

Ponte (1990) esclarece que o uso de um termo para designar a relação funcional entre duas grandezas, no entanto, só surgiu no início do século XVIII. Leibniz, provavelmente o primeiro a usá-lo, o empregou para referir-se, em linhas muito gerais, 'à dependência duma curva de quantidades geométricas como subtangentes e subnormais'. Uma definição, propriamente dita, para o conceito só surgiu, segundo o autor, em 1718 com a publicação de um artigo de Johann Bernoulli (1667 -1748). Neste artigo, Bernoulli se referia à "função de uma certa variável" como "uma quantidade composta de qualquer maneira desta variável e de constantes" (PONTE, 1990, p. 3).

Em 1748, segundo Ponte (1990), um antigo aluno de Bernoulli, Leonhard Euler (1707 – 1783), também apresentou uma definição para função tendo-a enunciando da seguinte maneira: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes" (RUTHING, 1984, *apud* BOTELHO e REZENDE, 2007, p. 70).

Também segundo Ponte (1990), desde cedo foi percebido que esta definição conduzia a 'diversas incoerência e limitações, conforme explica no trecho a seguir.

> A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de facto, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes!) (PONTE, 1990, p. 4).

É, portanto, razoável acreditar que Euler, sendo pupilo de Bernoulli, assim como ele, também concebesse que uma função só podia ser representada por uma única expressão analítica.

Botelho e Rezende (2007) chamam a atenção para o fato de que, apesar de Euler ter apresentado definição para os termos **quantidade constante** e **quantidade variável**, usados por Bernoulli em sua definição de função, não o fez para o termo ‘expressão analítica’ que ele próprio usa ao apresentar sua definição para esse conceito e comenta: “Euler não definiu ‘expressão analítica’, mas segundo Boyer (1991), tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares (exponenciais logarítmicas e trigonométricas)” (BOTELHO E REZENDE, 2007, p. 70).

A tentativa de resolver um problema que ficou conhecido como ‘o problema da corda vibrante’ e que consistia em determinar uma função capaz de descrever o formato de uma corda (vibrante) em um instante qualquer, de acordo com Botelho e Rezende (2007), veio a suscitar um longo debate sobre o significado de função e a provocar um novo entendimento sobre o conceito.

Este debate envolveu além do próprio Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange e d’Alembert, e que segundo Botelho e Rezende (2007),

> [...] o debate durou vários anos e, segundo Kliner (1989), teve importantes consequências na evolução do conceito de função. O conceito foi estendido, de modo a abranger: a) Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos; (b) Funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos (BOTELHO E REZENDE, 2007, p. 71).

Botelho e Rezende (2007) também relatam que, com base no novo entendimento que passou a ter sobre função, Euler elaborou uma nova definição para conceito, enunciando-a da seguinte forma: “se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinados por ele são chamadas suas funções” (RUTHING, 1984 *apud* BOTELHO e REZENDE, 2007, p. 71).

Estes autores chamam a atenção para o fato de que o termo ‘expressão analítica’ não aparece mais na nova definição de função apresentada por Euler.

Em 1797 foi a vez de Joseph Louis Lagrange apresentar sua definição para função, e conforme Ruthing (1984), Lagrange definiu função da seguinte maneira:

> Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis ... Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes desta variável , toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada (RUTHING, 1984, *apud* BOTELHO e REZENDE, 2007, p. 71).

Ponte (1990) relata que a noção de função desenvolvida até aqui, juntamente com as noções de continuidade e desenvolvimento em série, desenvolvidas posteriormente, por Cauchy e Fourrier, respectivamente, elevaram a um novo patamar o entendimento sobre função. Ou seja,

> Essa noção [de função como expressão analítica], associada às noções de continuidade e desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhes alteraram profundamente a sua natureza e significado (PONTE, 1990, p. 4).

Sobre essa noção, as contribuições dadas por Joseph Fourrier e Lejune Dirichlet nesse processo foram significativas: Fourrier, com a conjectura de que 'para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em séries trigonométricas, num intervalo apropriado' e Dirichlet com a determinação das 'condições suficientes' para que isso, de fato, pudesse ocorrer. Além disso, Ponte (1990) destaca que a definição de Dirichlet para o conceito de função separa o conceito da sua representação analítica e trata a função como "simples correspondência entre duas variáveis" (PONTE,1990, p. 4).

Visto desta forma, Dirichlet rompeu com um paradigma vigente na época, que era o de se pensar em funções em termos de expressões algébricas, enunciando sua definição de função nos seguintes termos:

> Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y = f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função continua de x para esse intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas de operações matemáticas (RU|THING, 1984 *apud* BOTELHO e REZENDE, 2007, p. 72).

O fato veio a repercutir. Um exemplo é George Stokes, matemático inglês que viveu no século XIX e que é apontado por Silva e Rezende (1999) como o responsável por libertar o conceito de função do conceito de número e sobre o qual declaram:

> Stokes, ao contrário de seus antecessores, procurou pensar em funções que não necessitavam ser expressas por uma combinação de símbolos algébricos. Ele afirmou: "Realmente, parece-me de grande importância, pensar em funções independentes de todas as idéias de expressão algébrica" (SILVA e REZENDE, 1999, p. 31)

Os autores, no entanto, não chegaram a apresentar a definição de Stoke para o conceito de função.

Cabe informar que o matemático soviético Youschkevitvh (1976, *apud* PONTE 1990), defende que 'o método analítico de introduzir funções', que classifica como de 'extraordinária eficiência', foi o que revolucionou a matemática e que reservou a noção de função um lugar central em todas as ciências.

Após Dirichlet, em 1837 e Stoke, em 1847, foi a vez de George Boole, em 1854, apresentar uma definição para função. Boole enunciou:

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x).[...] Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado

> será expresso pela forma f(0) (RÜTHING, 1984 *apud* BOTELHO E REZENDE, 2007, p. 73).

De acordo Botelho e Rezende (2007), a noção de função de Boole era a de **transformação**.

Já em 1887, foi Richard Dedekind quem definiu função e usou o termo "aplicação". De acordo com Dedekind,

> [...] em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por φ(s); dizemos também que φ(s) corresponde ao elemento s, que φ(s) é originada ou gerada pela aplicação φ, que s é transformado em φ(s) pela aplicação φ (BOTELHO E REZENDE, 2007, p. 73)

De acordo com Botelho e Rezende (2007) foi a definição de função apresentada por G.H.Hardy (1877 – 1947), entretanto, que veio a vingar e se estabelecer no meio matemático, vindo, inclusive, a receber mais tarde uma tradução para a linguagem de conjuntos. Nesta definição, Hardy elenca três características fundamentais das relações funcionais:

> y é sempre determinado por um valor de x;
> para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y;
> a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x (SILVA, 1999 *apud* BOTELHO e REZENDE, 2007, p.73).

Botelho e Rezende (2007) explicam que, no início do século XX, surgiu uma teoria no âmbito da Matemática, a "Teoria de Conjuntos", cujo precursor foi Georg Cantor. E que a teoria de conjunto, com sua linguagem e notação, provocou, dentre outras coisas, uma verdadeira revolução na forma de apresentar a Matemática.

A respeito da linguagem de conjuntos, Elon Lages Lima (2013), no livro "Funções e Números Reais", escreve:

> [...] a linguagem de conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às preposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica (LIMA, 2013, p.2).

De acordo com este autor, os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições", e que a vantagem em usar a linguagem de conjunto e suas notações é que "sobre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião e interseção, além da relação de inclusão" cujas "propriedades e regras operatórias são extremamente fáceis de manipular", representando assim um "enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições" (LIMA, 2013, p. 3-4) .

As palavras de Lima (2013) podem nos ajudar a compreender melhor porque, em 1939, a definição de função apresentada por G. H. Hardy, em 1908, foi traduzida para a linguagem de conjuntos numa iniciativa de um grupo de matemáticos conhecido pelo pseudônimo de Bourbaki.

Na versão de Bourbaki (1939), a definição de função aparece da seguinte forma:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos, ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
>
> Dá-se nome função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que encontra na relação dada com x; diz-se que y é valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional consideradas. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p.6 *apud* PIRES, 2014, p. 43).

Como podemos observar, levou muito tempo a evolução e o aperfeiçoamento das noções de função e que ambos só foram possíveis devido à contribuição de vários matemáticos com suas diferentes noções a respeito do conceito.

Entendemos que por meio dessas definições pode-se ter acesso às diferentes concepções de função e que estas são importantes serem mencionadas à medida que ajudam a compreendê-las melhor. Nós acreditamos, também, que todas essas ideias tiveram papel fundamental no desenvolvimento do conceito de função que, ainda hoje, está impregnado de todas elas.

2.6 O Ensino de Função Agora e Outrora

Função é hoje o tema principal do programa de Matemática da primeira série do Ensino Médio (LIMA, 2013), e a importância desse tema para a construção do conhecimento matemático e de outras áreas, pelos estudantes, é destacada no principal documento de orientação curricular do país, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cuja orientação destaca que,

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das Ciências, necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2002, p.121).

No que se refere ao ensino de funções, no PCN recomenda-se que:

> [...] o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado (BRASIL, 2002, p.121).

Ainda sobre o ensino de funções, no documento são apresentadas as seguintes considerações:

> [...] se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa (BRASIL, 2002, p.121).

O currículo de Matemática das escolas públicas, que compõem a rede estadual de ensino sob a responsabilidade da Secretaria de Estado e Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ), estabelece que o estudo de funções se inicie no último ano do Ensino Fundamental, nono ano, e que perpasse toda a primeira série do Ensino Médio e parte da segunda série.

Para o 9º ano do Ensino Fundamental, o documento prevê o desenvolvimento de habilidades e competências, entre as quais se destacam:

> a) Compreender intuitivamente o conceito de função como relação entre duas grandezas;
> b) representar graficamente uma função no plano cartesiano, utilizando tabelas de pares ordenados;
> c) resolver situações-problema que envolvam o conceito de função (RIO DE JANEIRO, 2012, p. 13).

Enquanto que, para o Ensino Médio, o documento prevê o desenvolvimento de habilidades e competências para:

> a) Compreender o conceito de função através da dependência entre variáveis;
> b) identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade ou padrão (lei de formação da função);
> c) construir gráficos de funções utilizando tabelas de pares ordenados;
> d) analisar gráficos de funções (crescimento, decrescimento, zeros, variação do sinal) (RIO DE JANEIRO, 2012, p. 15).

Consideramos oportuno destacar que no documento são feitas referências a duas concepções presentes na evolução histórica do conceito de função, que são: “relação entre duas grandezas” e “dependência entre variáveis” e que, na opinião de muitos autores, são importantes que os estudantes conheçam, pois ajudam a compreender melhor o que vem a ser função e a mostrar que este conceito matemático, como tantos outros, não nasceu pronto, mas foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo.

Cabe ainda mencionar que, para o Ensino Médio, o documento preconiza o estudo de funções algébricas — funções polinomial, exponencial e logarítmica — e funções transcendentes — funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), com o objetivo que os estudantes aprofundem seus conhecimentos sobre o conceito de função e que também conheçam diferentes tipos de funções.

O documento preconiza também que seja proposto na primeira série do Ensino Médio, o estudo das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau, além da função exponencial e das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e deixado para a segunda série o estudo da função logaritmo.

Ciro Braga (2006), autor do livro “Função: a alma do ensino da matemática” explica que a inserção do tema “função” entre os conteúdos a serem estudados em matemática no ensino secundário está vinculada à implantação, na década de 1930, nas escolas do país, de uma nova disciplina, a Matemática, resultante da unificação de outras três disciplinas escolares existentes naquela época: aritmética, álgebra e geometria.

O autor também explica que a nova disciplina foi implantada como uma medida de promoção no Brasil das ideias de um movimento internacional que visava reformular o ensino de matemática, no curso secundário, e que possuía raízes principalmente na Alemanha, na Inglaterra, na França e nos Estados Unidos.

Como uma das principais lideranças do movimento reformista e cujas ideias vieram a influenciar-lhe fortemente, Braga (2006) aponta o matemático alemão Christian Feliz Klein (1849 – 1925). Klein, segundo o autor, possui algumas ideias sobre promover a reformulação do ensino de matemática no secundário, que consistiam, dentre outras, em:

> Introduzir noções do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos da escola secundária;
> Incluir o conceito de função com o papel de ideia coordenadora das diversos assuntos da matemática escolar;
> Procurar desenvolver o pensamento funcional do aluno desde as séries iniciais;
> Fomentar as conexões entre as diversas partes da matemática como também de uma maior valorização da intuição (BRAGA, 2006, p. 57).

Isso ajuda a explicar porque, no final da década de 1920, Henrique de Medeiros Guimarães Roxo, catedrático do Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, e simpatizante das as ideias de Klein, promoveu a implantação da disciplina Matemática na grade de disciplinas do colégio e inseriu função entre os conteúdos a serem estudados no secundário.

Cabe mencionar que, através de uma portaria ministerial publicada em 30 de junho de 1931, a Matemática foi instituída, em âmbito nacional, como uma nova disciplina escolar.

Para Braga (2006) “é justo registrar que [Euclides Roxo com] o seu espírito vanguardista e sua atuação obstinada foram determinantes para a penetração do conceito de função nos programas oficiais brasileiros” (BRAGA, 2006, p. 149).

Ao examinarmos alguns dos documentos atuais contendo orientações curriculares, vigentes atualmente em nosso país (BRASIL, 2002; RIO DE JANEIRO, 2012), vemos que ideias disseminadas por Roxo e que dão destaque ao ensino de funções no ensino secundário ainda continuam vigentes. Um exemplo é o programa de Matemática da primeira série do Ensino Médio todo ele voltado para o estudo de funções, o que facilmente se verifica a partir de uma consulta a esses documentos e a livros didáticos que são adotados por escolas públicas e privadas no país.

Ao que tudo indica, não há dúvidas quanto a importância da noção de função para a formação matemática do estudante. A questão tem sido se pensar e investigar meios que possam contribuir para promover a sua efetiva aprendizagem.

Apresentadas algumas considerações sobre concepções, sobre as diferentes visões de funções a partir do século XVIII e sobre a introdução do conceito de função no currículo do Ensino Básico, como possibilidades de recursos que possam potencializar a nossa análise, e que não se esgotam com este trabalho, formamos um alicerce para iniciar a edificação de nossa pesquisa apresentamos a seguir o aporte metodológico.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, seguiremos na descrição da metodologia de pesquisa adotada, na apresentação do local e sujeitos da pesquisa e dos instrumentos de coleta e análise de dados.

3.1 *Design-Based Research* (DBR)

A metodologia escolhida para nos orientar durante a realização desta pesquisa é *Design-Based Research.* Apontado como um novo paradigma de investigação, seu objetivo é, segundo Matta e Santiago (2016),

> [...] contribuir para o aperfeiçoamento de pesquisas focadas na colaboração entre os participantes; na construção e difusão do conhecimento de modo criativo, critico e inovador; além de otimizar a pesquisa aplicada, fornecendo subsídios para uma observação de como as teorias empregadas nesse tipo de pesquisa serão melhor compreendida e adequadas eficazmente (MATTA E SANTIAGO, 2016. p.1).

Quanto à metodologia, a sua escolha deve-se ao fato de que, por princípio e concepção, essa metodologia visa ao estudo de aplicações que de fato possam ser realizadas e integradas às práticas e que possam ajudá-las a tornarem-se melhores, o que vem ao encontro do nosso propósito.

Cobb *et al* (2003, *apud* KINDEL, 2012) alertam para o fato de que uma pesquisa DBR não trata apenas de verificar se uma inovação vai funcionar ou não, e sim, levantar novas teorias, ainda que humildes, sobre inovações que se pretenda promover e apresentam algumas características desse tipo de metodologia.

Segundo estes autores, a DBR é pragmática, teórica, altamente intervencionista, de caráter iterativo, além de prospectiva e reflexiva. Essas caraterísticas, como explica Kindel (2012), decorrem do fato de que a metodologia propõe que sejam planejadas e executadas intervenções a partir da aplicação de teorias já existentes, fazendo com que, de certa forma, essas teorias sejam analisadas, avaliadas e gerem mais conhecimento acerca do processo de aprendizagem.

A mudança de paradigma na condução de pesquisas em Educação Matemática, como apontam Steffe & Thompson (2002, *apud* KINDEL, 2012), começou na década de 1970, quando pesquisadores da área, que procuravam compreender ou explicar o processo de aprendizagem da matemática no contexto do ensino, passaram a ter a necessidade de incorporar novos elementos às pesquisas, como, por exemplo, a interação entre os estudantes, entre os estudantes e o professor, as reações diante das tarefas e as mudanças das propostas que ocorreram. Os experimentos de ensino, como foram denominados esses tipos de trabalhos, careciam de método adequado para a sua investigação e isso fez com que pesquisadores de várias partes se empenhassem em desenvolver, fundamentar e caracterizar propostas metodológicas para a condução desse tipo de estudo.

Surge no bojo desse processo um vasto leque de abordagens que apesar de não serem necessariamente coincidentes, apresentam características comuns, aponta Mendes (2014).

> Apesar de a expressão *design research* incluir um vasto leque de abordagens metodológicas, não necessariamente coincidentes, Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) identificam um conjunto de características transversais e comuns a todas elas (MENDES, 2014, p.1).

As características apontadas por Cobb *et al* (2003) são cinco e estão relacionadas ao propósito geral, à natureza e a raízes da *Design Research*, como explica Mendes (2014): "a primeira está relacionada com o seu propósito geral, que é desenvolver um conjunto de teorias acerca do processo e dos meios que suportam uma determinada aprendizagem, seja ela individual ou de uma turma" (MENDES, 2014, p. 2).

No nosso caso, sobre o da elaboração e análise de tabelas na representação das funções, e sobre as concepções de função dos estudantes. A ideia era além de identificar como concebiam as funções, observar como obteriam valores de y, a partir de valores fixos de x, e para diferentes tipos de funções, no tocante as estratégias utilizadas.

A respeito da segunda característica, Mendes (2014) escreve: "a segunda está associada à natureza bastante intervencionista desta metodologia, usada frequentemente para investigar aspetos educativos associados a inovações" (MENDES, 2014, p. 2).

A inovação, no nosso caso, se refere a não só apresentar exemplos prototípicos de funções lineares, quadráticas, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas nos primeiros dias de aula (e todos de uma só vez), mas também o de destinar um tempo para escutar o que os estudantes tinham a dizer sobre função, sobre as funções.

Quanto à terceira característica, a autora diz estar relacionada com as duas anteriores, e que tem a ver o aspecto prospectivo e aspecto reflexivo da pesquisa DBR, que por sua vez dão origem a uma quarta característica dessa metodologia: iteratividade.

> Efetivamente, este tipo de estudo é implementado a partir de conjeturas sobre o processo de aprendizagem e das condições necessárias ao seu desenvolvimento, com carácter prospetivo. A sua marca reflexiva está associada à verificação, ou não, das conjeturas formuladas na fase prospetiva e à sua reformulação, no caso de aquelas serem refutadas. A ligação entre os aspetos prospetivo e reflexivo dá origem à quarta característica deste tipo de estudos, o seu carácter iterativo: são geradas e testadas conjeturas e, no caso de serem refutadas, novas conjeturas são formuladas (COBB *et al*, 2003, *apud* MENDES, 2014, p. 1-2).

Por fim, sobre a quinta característica, pragmatismos, Mendes (2014) escreve:

> [...] a quinta característica comum está relacionada com as suas "raízes pragmáticas", ou seja, as teorias desenvolvidas durante o processo de experiência devem ser úteis a esse mesmo processo e não serem, apenas, teorias filosóficas. (COBB *et al*, 2003, *apud* MENDES, 2014, p. 1-2).

Com base nesses pressupostos, o desenvolvimento da pesquisa teve duas fases: uma primeira, em que lançando um olhar sobre o futuro (com base na revisão de literatura e em nossa experiência docente) foram tecidas conjecturas que serviram de base à elaboração de tarefas, e uma segunda, na qual as tarefas foram implementadas, as informações coletadas e analisadas, e, as considerações elaboradas.

3.2 Procedimentos Metodológicos

Apresentamos aqui as fases que foram planejadas para o desenvolvimento da pesquisa, além dos instrumentos a serem utilizados na coleta e análise de dados.

A tabela 1 traz uma breve descrição das ações que foram planejadas para serem executadas em cada fase.

Tabela 1: Fases da pesquisa e ações empreendidas em cada fase.

FASES	AÇÕES
1	Levantamento bibliográfico (análise de publicações em periódicos nacionais e internacionais, dissertações, livros e teses, com ênfase no que foi publicado entre 2010 e 2015); Planejamento das tarefas (instrumentos a serem usados para coletar de dados).
2	Implementação das tarefas em sala de aula; Coleta e análise de dados; Análise e avaliação dos dados.

3.2.1 Fase 1

Durante esta fase foram realizadas leituras e discussões acerca do ensino e da aprendizagem de funções, com o propósito de fazer uma reflexão acerca dos problemas apontados como causa da dificuldade de aprendizagem dos estudantes e planejar uma intervenção. Para tanto, foi realizado um levantamento bibliográfico incluindo histórico e pesquisas sobre o tema. Em ato contínuo, foi iniciada a elaboração das tarefas a serem propostas aos sujeitos de pesquisa durante a investigação.

Foi dado enfoque nas pesquisas produzidas recentemente – entre 2011 e 2015 – para se obter uma ideia do estado do conhecimento que se tem hoje sobre o assunto. A busca contemplou periódicos, teses e dissertações.

Nessa fase, um levantamento com os estudantes para saber que concepções sobre funções possuíam, também foi efetuado, além de consulta a duas coleções de livros didáticos de Matemática que fazem parte das obras disponibilizadas para as escolas públicas estaduais pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), triênio 2015 – 2017. A consulta ao material didático teve como finalidade sugestões de atividades que pudessem ser incorporadas ao nosso trabalho.

Muito embora neste trabalho não tratemos da abordagem curricular, propriamente dita, há aspectos nela que nos interessam. Portanto, foram consultados documentos de orientação curricular oficiais, que são os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs dos Ensinos Básico e Médio (BRASIL, 1988), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2002), e o Currículo das escolas públicas da rede estadual de educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ, 2012).

3.2.2 Fase 2

Esta fase foi dedicada a pesquisa de campo, quando realizamos as atividades planejadas. Durante essa fase, as respostas dos estudantes foram analisadas e duas novas atividades elaboradas, sendo uma em função das necessidades processuais dos estudantes, apontadas pela dificuldade destes em operar com números inteiros, e outra em função do nosso interesse em saber como os estudantes definiriam função.

As tarefas foram elaboradas para fins de pesquisa, e se constituem no nosso principal instrumento para coleta dos dados.

Em virtude do caráter intervencionista da pesquisa, o tema, o cronograma e as tarefas foram idealizados tanto para atender às exigências do currículo de Matemática da escola em que a pesquisa foi realizada e às demandas dos sujeitos participantes, quanto aos objetivos da investigação.

Nossa proposta contemplou a implementação das atividades uma vez por semana, durante o período das aulas de Matemática da professora-pesquisadora com os estudantes, e com estes por vezes sozinhos ou agrupados – em duplas, ou trios – para resolvê-las.

3.3 Local e Sujeitos de Pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola pública estadual, localizada na região metropolitana do estado do Rio de Janeiro. Na ocasião da pesquisa, a escola atendia, distribuídos nos turnos: manhã, tarde e noite, 700 estudantes regularmente inscritos no Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Trata-se de uma escola que em agosto de 2017 completará cinquenta anos de funcionamento.

Participaram da pesquisa, estudantes de três turmas da 1ª série do Ensino Médio regular, do turno matutino dessa escola. Jovens, de ambos os sexos, e com idades variando entre 16 e 18 anos. E apesar da defasagem idade/série apresentada por alguns dos estudantes, apenas dois deles informaram estar refazendo a 1ª série do Ensino Médio.

Consideramos oportuno informar, que, nesta comunidade escolar, são altos os índices de abandono e evasão. Em decorrência desse fato, o número de estudantes matriculados e que a frequentam vem diminuindo a cada ano. Assim, na época em que a pesquisa foi realizada, cada turma, do Ensino Médio, tinha em média 15 estudantes frequentes. Por esse motivo optamos por trabalhar com as três de turmas.

3.4 Coleta de Dados

Para a coleta de dados, foram utilizados os seguintes instrumento: tarefas matemáticas e não-matemáticas, além do diário de campo.

De acordo com Ponte (2005), e tal como nós o empregamos aqui, o termo tarefa refere-se aquilo que se realiza quando se está envolvido em uma atividade, isto é, ao objetivo da atividade (PONTE, 2005, p.1).

No diário de campo, foram feitos registros de pontos considerados importantes pela pesquisadora sobre a interação entre os estudantes, entre os estudantes a professora-pesquisadora, as reações às tarefas propostas, as dificuldades encontradas, bem como ajustes que seriam necessários, entre outras.

Na tabela 2, apresentamos a designação das atividades e uma breve descrição dos seus objetivos.

Tabela 2: Atividades planejadas

Designação da atividade	Objetivo(s)
Tempestade de ideias	Levantar as concepções intuitivas dos estudantes sobre o tema “funções”.
Completar as tabelas	Montar as tabelas de cada uma das funções. Comparar os resultados das diferentes tabelas. Usar tabelas para construir o gráfico das funções.

Decorre que duas outras atividades foram incluídas. Na tabela 3, apresentamos então todas as atividades que foram efetivamente implementadas.

Tabela 3: Atividades implementadas

Designação da atividade	Objetivo(s)
Tempestade de ideias	Levantar a noção de função no início do ano letivo e antes da abordagem do tema.
Complete as tabelas	Montar as tabelas de cada uma das funções Comparar os resultados das diferentes tabelas. Usar a tabela da função linear para construir o gráfico.
Quadrado não é dobro	Esclarecer dúvidas dos estudantes sobre a potenciação envolvendo números inteiros.
Defina função	Levar os estudantes a manifestarem suas concepções de função (ao final do ano letivo).

3.5 Análises de Dados

A análise consistiu na leitura criteriosa de todo o material escrito, produzidos pelos estudantes durante as atividades, buscando evidências que corroborassem nossas análises a respeitos das suas concepções sobre função. Os dados obtidos foram analisados à luz do referencial teórico adotado nessa pesquisa, apresentado no segundo capítulo da dissertação.

Para organizarmos o processo de análise dos dados, denominamos cada uma das três turmas pela letra T, maiúscula, acompanhada de um numeral: 01, 02 e 03, respectivamente. Quanto aos estudantes, seus nomes organizados em ordem alfabética, e por turma, foram denominados pela letra E, maiúscula, acompanhada do numeral referente a sua posição na ordem alfabética da turma. Essas medidas também foram adotadas para se preservar o anonimato dos que participaram do estudo, ainda que não nos refiramos a esses estudantes em nossas análises, mas ao que foi dito por eles.

Para realizar a averiguação dos termos apresentados pelos estudantes a respeito do que pensam sobre função buscamos encontrar um recurso que nos ajudasse a contar e a distribuir a freqüência dos termos usados para associada à palavra chave de nossa pesquisa, função. Existem diversos aplicativos e páginas na internet que geram nuvens de palavras. Esta que exibimos foi elaborada na página da internet do Tagexdo®, um gerador *on-line* de *nuvens de palavras*.

Nuvem de palavras é um recurso frequentemente empregado no meio digital, principalmente na rede mundial de computadores, a Internet. E consiste em colocar em evidência palavras que aparecem com maior frequência em um texto. Desse modo, a frequência com que as palavras aparecem determina o tamanho da fonte usada na exibição das palavras.

A seguir, apresentamos e tela que encontramos no endereço: www.tagexdo.com.

Figura 2 – Print da primeira tela do site

Clicando sobre *Start Now*, em negrito no canto superior direito do quadro azul, somos encaminhados para a seguinte tela.

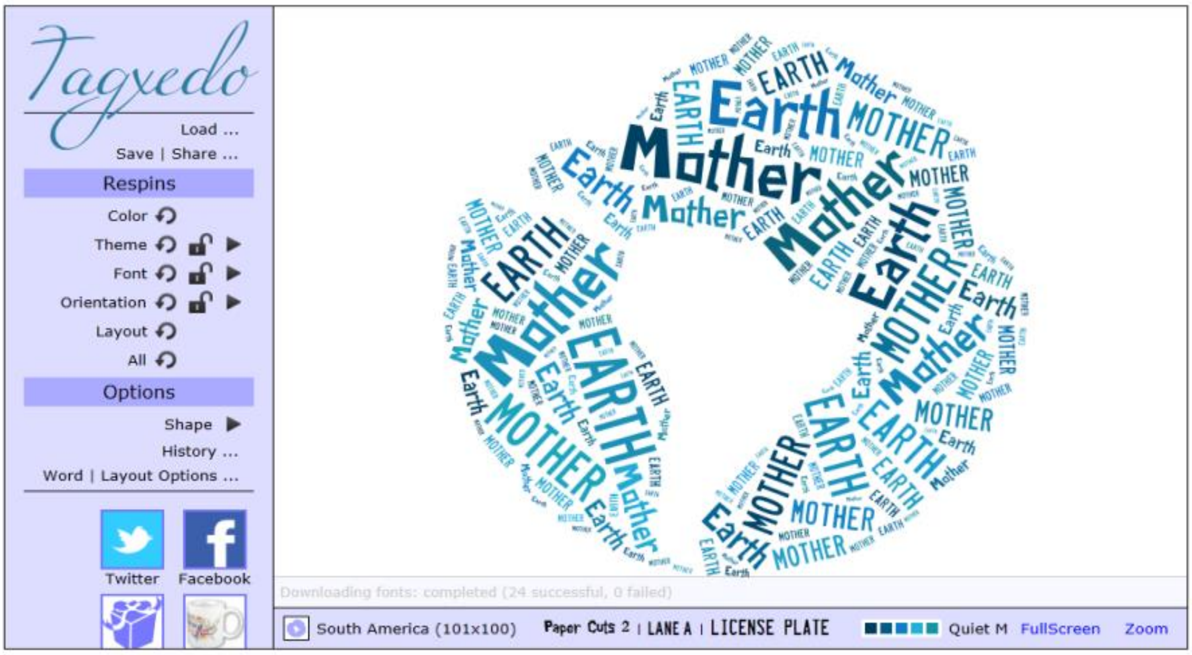


Figura 3 - Print da segunda tela

Nesta segunda tela, clicando sobre a palavra *load*, que fica no lado esquerdo, abre-se a tela com local para inserção do texto ou das palavras que serão usadas na composição da nuvem.

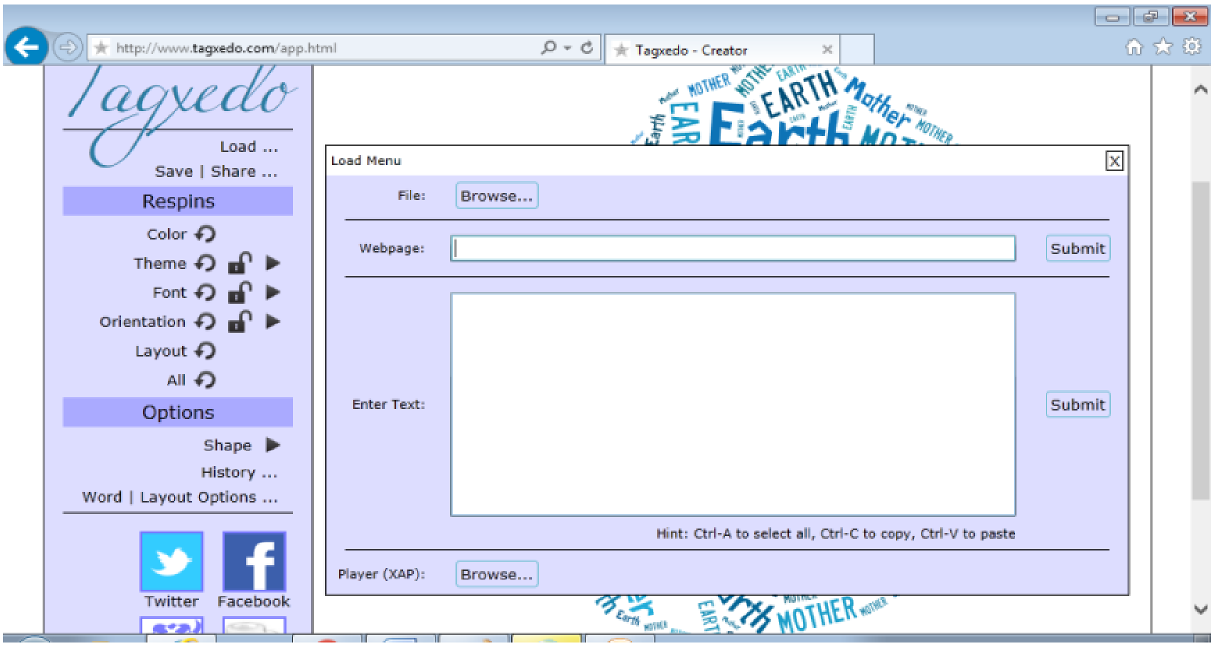


Figura 4 - Print da terceira tela

Apresentadas os procedimentos metodológicos de nossa pesquisa, partimos para a apresentação dos resultados de nossas análises.

4 A PESQUISA DE CAMPO

4.1 As Atividades

A tarefa para descobrir o que fazer e como agir ao investigar a concepção do estudante sobre qualquer que seja o assunto não é tarefa fácil. Segundo Ponte (1992), a tarefa de investigar concepções exige muitas vezes uma abordagem “especialmente imaginativa” por parte daquele que investiga, já que as pessoas “têm de um modo geral dificuldade em expressar as suas concepções, particularmente naqueles assuntos em que habitualmente não pensam de uma forma muito reflexiva”. Para o autor, muito mais que realizar entrevistas com perguntas diretas “é preciso propor tarefas, situações e questões indiretas, mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciar-se” (PONTE, 1992, p.34).

Dito isso, foram elaboradas e aplicadas duas atividades para fins de pesquisa: a atividade A1, denominada Tempestade de Ideias, que tinha como objetivo fazer um levantamento do significado de função para os estudantes antes da abordagem do tema em sala de aula e a atividade A2, que tinha como objetivo identificar as principais estratégias utilizadas pelos estudantes, para calcular o valor da variável dependente, dada a lei de formação e o domínio da função, além de propor a exploração de tabelas e gráficos para as funções $y = x, y = x^2, y = x^3, y = 2^x, y = \log_2 x$ e $y = sen(x)$, tendo como base elementos do conjunto dos números inteiros, quais sejam $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2$ e $3\}$.

Apresentamos a seguir a descrição dessas atividades, os objetivos de cada uma delas, a forma como se deu a implementação de cada uma delas, a coleta e análise dos dados, respostas dadas pelos participantes da pesquisa.

4.1.1 Atividade 1: uma tempestade de ideias

Essa atividade consistiu em fazer com que os estudantes falassem livremente sobre função. Para tanto, foi pedido a cada estudante que registrasse numa folha de papel a primeira palavra que lhe viesse à mente a partir da leitura, no quadro branco da sala de aula, da palavra “função”. Para tanto, a cada estudante foi entregue um quarto de folha A4 branca.

Após todas as palavras escritas pelos estudantes terem sido transcritas, no quadro, ao redor da palavra “função”, foi feito o convite para que aqueles que quisessem acrescentar outras palavras as já escritas. E uma vez que concluída essa etapa foi solicitado a elaboração de um texto, em formato livre, usando aquelas palavras.

Kindel (2012), investigando as concepções de infinito de um grupo de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, convidou cada integrante a postar a primeira palavra que lhe veio à mente ao ler a palavra “infinito” quando esta foi escrita no *whiteboard* de uma sala de aula virtual. A autora avaliou que esta atividade, que nomeou como Tempestade de Ideias, foi de grande proveito para seu trabalho, pois contribuiu inclusive para ampliação do rol de metáforas para infinito em seu trabalho. Com base na experiência de Kindel (2012), decidimos usar essa atividade em nossa pesquisa.

4.1.1.1 Descrevendo as nossas tempestades de ideias.

Antes de realizarmos a Tempestade de Ideias para levantarmos os significados da palavra “função” para os estudantes, consideramos oportuno realizar uma primeira experiência com a essa atividade, com o propósito de fazer com que os alunos e a professora se familiarizassem com a dinâmica da atividade, além de avaliar seu potencial junto às turmas participantes, verificar quais seriam suas fragilidades naquele contexto e se os alunos entenderiam a proposta e participariam de forma a colaborar com a pesquisa.

4.1.1.2 Primeiras experiências com a tempestade de ideias

Demos início à atividade, explicando para os alunos como esta ocorreria, isto é, informando que uma palavra seria escrita no quadro e que a partir dela cada aluno deveria escrever outra, aquela que viesse à mente, enfatizando não haver a necessidade de se preocuparem com o fato de a palavra fazer ou não sentido e que esse procedimento ocorreria em dois momentos: depois de ter lido a palavra escrita pela professora e depois ter lido todas as palavras ditas pela turma e escritas no quadro pela professora. Foi informado ainda que ao final todos deveriam entregar à professora um texto com aquelas palavras que estavam no quadro e que objetivo daquela atividade era o de identificar o significado de determinadas palavras naquele meio.

Como era a sua primeira experiência com a Tempestade de Ideias e havia o receio de que os alunos não quisessem participar, a professora preocupou-se em escolher palavras sobre as quais os alunos tivessem algo a dizer, palavras que de alguma forma estivessem presentes no cotidiano desses alunos. Desse modo, foram escolhidas as palavras BOLA para uma turma, e, CONJUNTO e ROSA para as duas outras, respectivamente.

A primeira turma a realizar a Tempestade de Ideias o fez com a palavra CONJUNTO, que foi escrita pela professora no quadro branco da sala de aula. No papel, cada estudante, como solicitado, escreveu uma palavra a partir da palavra dada. As palavras escritas foram: *as 3 marias, conjunto de estrelas, roupas, galáxia, mochila, maçã* e *nada*. Os sete (7) estudantes que estavam presentes na sala, da turma T3, na ocasião, participaram dessa atividade.

No quadro, ao redor da palavra CONJUNTO, a professora escreveu todas as palavras que estavam nos papéis recolhidos e pediu, então, que os estudantes as lessem e que, se tivessem interesse, apresentassem mais palavras para juntar as que lá estavam. Assim, ao redor das primeiras palavras escreveu as outras palavras que foram ditas pelos estudantes: *mundo, preto e branco, eternidade, amor, infinito, universo, material, planetas, estrelas, jamelão, pessoas.* Terminada a fase das sugestões, a professora solicitou que escrevessem um texto, informando que poderia ser feito em qualquer formato e com qualquer quantidade de linhas. Recolhidos os textos a atividade foi dada por encerrada.

Todos os procedimentos relacionados ao desenvolvimento da atividade foram repetidos também nas outras duas turmas.

A segunda a realizar a Tempestade de ideias o fez com a palavra ROSA, e os procedimentos iniciais foram os mesmo adotados na primeira turma.

As primeiras palavras que surgiram foram: *flor, pétala, cor, perfume, flor.* Depois surgiram as palavras: *pixador, lápis, giz de cera, apontador, carro, hidrocor, cama, lâmpada, guarda-vestido, mochila, iogurte, caderno, maquiagem, caneta, batom, roupa, armários de quarto, borracha, planta, esmalte, lápis*. Terminada a fase das sugestões de palavras, iniciou-se a escrita do texto. A atividade foi dada como encerrada quando os textos foram recolhidos.

Na turma T4, a Tempestade de Ideias foi realizada com a palavra BOLA. As primeiras palavras que surgiram foram: *extrovertido, chutar, falta, sair, pôquer, correr, jogar, queimada, pênalti.* Depois surgiram as palavras: *x-tudo, emoção, easy, ao cubo, royal-flush, alegria, sentimento, árduo, amizade.*

Assim como nas duas outras turmas em que a atividade foi realizada, foi solicitado aos estudantes que elaborassem um texto em formato livre e com qualquer quantidade de linhas e após recolhido o texto a atividade foi encerrada.

Os estudantes que participaram dessa atividade demonstraram haver entendido a proposta da atividade, foram participativos e de maneira espontânea sugeriram as palavras e elaboraram seus textos.

Diante do exposto pudemos avaliar o potencial da Tempestade de Ideias enquanto metodologia didática, mostrando-se adequada aos objetivos da nossa investigação. Desse modo, decidiu-se que no dia 01/03/2016 seria feita a próxima Tempestade de Ideias e com a palavra FUNÇÃO.

4.1.1.3 A tempestade de ideias com a palavra "função"

Como planejado anteriormente, a Tempestade de Ideias com a palavra FUNÇÃO seria realizada com as três turmas, no dia 01/03/2016. No entanto, em virtude de problemas relacionados a rotina escolar, a atividade só ocorreu em uma das turma. As duas outras turmas só vieram a fazer a Tempestade de Ideais com a palavra "função" no início do mês de abril.

4.1.1.4 As primeiras gotas

Aos estudantes foi entregue um pedaço de papel retangular com a orientação de nele escrever a primeira palavra que viesse à mente ao ler a palavra escrita no quadro pela professora: FUNÇÃO.

Recolhidos os papéis com as primeiras palavras que os estudantes haviam escrito ao ler a palavra FUNÇÃO, estas foram transcritas pela professora no quadro. As palavras foram: *expressão, vulcão, espaço, dever, tranquilo, nada, jogar bola, dormir, exercício, cabrito, equação, empresário, trabalho, chato, emotiva, porque essa idiotice? e trabalhar.*

Os estudantes manifestavam diferentes reações à medida que as palavras iam sendo escritas: surpresa, diversão, estranhamento, rejeição, questionamento, negação. E a professora aproveitou para lembrá-los que o objetivo era levá-los a falar livremente sobre a palavra FUNÇÃO e que, portanto cada um poderia falar/escrever aquilo que quisesse desde que não fossem palavras ofensivas ou de baixo calão. Foi dado então prosseguimento a dinâmica e as palavras seguintes foram: *estudar, determinação, favorável, tranquilo, todo-mundo-odeia-Cris, objetivo, raiz quadrada e motivação.*

O primeiro passo no sentido de analisar os significados da palavra "função" para os estudantes foi listar essas palavras e agrupá-las de acordo com algum significado comum que possuíssem.

As palavras *jogar bola, dormir, trabalhar, estudar, exercício, trabalho e empresário* foram classificadas como **ação ou atividade**; *tranquilo, chato emotiva, porque essa idiotice?, todo-mundo-odeia-Cris e determinação* como **sentimentos ou emoções** e *expressão, equação e raiz quadrada,* como **cálculo ou operação matemática**.

Desse modo foi possível distinguir três categorias de significados:

- Ação/atividade.
- Sentimento/emoção.
- Cálculo/ operação matemática.

Os termos *vulcão, espaço* e *cabrito* não foram possíveis enquadrar em nenhuma das três categorias acima citadas.

Quanto aos textos elaborados pelos estudantes, estes acabaram por ficar sem nexo e difíceis de compreender. Acreditamos que isso ocorreu por conta de termos solicitados que tentassem elaborá-los usando, se não todas as palavras citadas, ao menos uma boa parte delas.

Por conta desse resultado, nas duas outras Tempestades de Ideias realizadas com a palavra "função"(nas outras duas turmas) apesar de mantermos a coleta de palavras soltas, não solicitamos que escrevessem um texto com todas elas, e sim que as usassem para completar a frase: função é....

Uma das principais características da metodologia de pesquisa adotada, a DBR, são os ciclos interativos, que visam à promoção de melhorias no projeto em desenvolvimento e dão a oportunidade ao pesquisador de melhorar as soluções pensadas por eles, tendo em vista não só os objetivos de seus trabalhos, mas também as características do local e das pessoas com os quais conta para se desenvolver. Em nosso caso esses ciclos se configuraram a cada implementação de uma atividade. A tempestade de ideias, por exemplo, foi realizada em diversos momentos com as três turmas, sendo cada um desses momentos essenciais para sua adequação ao trabalho que tínhamos a intenção de desenvolver.

Desse modo, ajustes na proposta inicial foram sendo feitos até a sua última fase, que marcam o fim do ciclo de realização dessa atividade.

A exemplo do que ocorreu na primeira turma em que foi realizada a Tempestade de Ideias, nas demais os estudantes também participaram ativamente e colaboraram de forma significativa para que tomássemos conhecimento dos significados da palavra "função" que circulavam no contexto em que a pesquisa estaria sendo desenvolvida. Quanto à decisão de solicitar que completassem a frase, esta se mostrou adequada ao nosso objetivo e nos ajudou a elucidar o sentido com que as palavras soltas foram usadas.

Na segunda turma a realizar a Tempestade de Ideias com a palavra função surgiram, primeiro, as seguintes palavras/expressões: *contas, dedicação, resolver uma conta, fazer algo, nada, dedicação ao compromisso, contas* e *resolver uma conta*; e depois: *compromisso, cumprir algo, conta* e *contar.*

Já na terceira turma houve só um momento de coleta de palavras soltas, porque os estudantes alegaram não ter mais o que falar. As palavras foram: *escola, importante na matemática, obrigação, trabalho, cumprir algo, ordem, cumprir um dever e trabalho*.

Quanto a classificação das palavras/expressões mencionadas pelos estudantes dessa turma: *resolver uma conta, fazer algo, nada cumprir algo, trabalho, cumprir um dever* e *obrigação* foram classificadas como **ação/atividade**; *dedicação, dedicação ao compromisso, compromisso* e *importante na matemática*, como **sentimentos/emoções** e *contas, resolver uma conta, conta* e *contar,* como **cálculo/operação matemática**.

Há palavras que podem, no entanto, ser enquadradas tanto na categoria "ação/atividade" quanto na categoria "cálculo/operação matemática", como: *resolver uma conta* e *contar*. Isso nos levou a questionar se ao invés de três não deveríamos manter apenas duas categorias. Porém, considerando que "cálculo e operação matemática" são ações muito específicas e decidimos manter as três categorias.

Na figura 5 apresentamos a *nuvem de palavras* construída a partir do que os estudantes escreveram a respeito do termo "função" durante a Tempestade de Ideias. Todas as palavras escritas pelos estudantes foram inseridas no aplicativo, figura 5, e que nos gerou a seguinte *nuvem de palavras* para função.

Figura 5 - Nuvem de palavras formada a partir das concepções dos estudantes sobre função

Como se pode observar, a nuvem de palavras reforça aquilo que já comentamos quanto às classes de palavras que foram mencionadas pelos estudantes, isto é, que estas palavras remetem à ideia de ação ou atividade, sentimento ou emoção e cálculos ou operações matemáticas.

Com base nessas respostas mantivemos a tarefa 2, completar as tabelas das funções dadas, cuja análise segue.

4.1.2 Atividade 2: Funções, fazer contas

Na atividade anterior vimos que para alguns estudantes função era visto como "fazer contas" ou "executar operações com números e achar resultados". Noções estas que corroboram com a ideia difundida sobre a Matemática — a de que ela é cálculo (SEGURADO E PONTE, 1998). Nossa hipótese, que os alunos estando habituados com as "contas" não teriam dificuldade em lidar com a representação tabular das funções, nos permitiu aplicar a atividade 2, conforme previsto anteriormente, fase 1, em que o estudante era solicitado à preencher a tabela de seis funções (ver figura 6) e em seguida representar os respectivos gráficos. Naturalmente, na ocasião em que planejamos esta atividade, nós não tínhamos conhecimento do que os estudantes já sabiam a respeito de função.

A Tempestade de ideias e, posteriormente, uma conversa informal com esses estudantes nos revelou que muitos nunca haviam estudado funções. Ou seja, não sabiam o que era uma função, do ponto de vista matemático, levando-nos, então, a repensar a implementação da atividade 2 e a decidir por solicitar, no primeiro momento, somente o preenchimento das tabelas.

Nosso objetivo era observar de que forma eles operariam com os números inteiros negativos, como calculariam as potências quaisquer que fossem as bases e os expoentes dados, de que forma obteriam os valores de logaritmos e as razões trigonométricas.

Complete as tabelas das funções abaixo:

x	$y = x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = x^2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = x^3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = 2^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$\log_2 x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$sen(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Figura 6 – Atividade 2

Esta atividade foi desenvolvida em três encontros:

No 1º encontro, os estudantes completaram as tabelas até à função exponencial. No 2º encontro, a professora interviu, sugerindo o uso da calculadora, visto que eles não tiveram essa iniciativa, deixando as tabelas seguintes, da função logarítmica e da função trigonométrica, sem resolver. No 3º encontro os estudantes analisaram as respostas das tabelas buscando semelhanças e diferenças.

Após completarem as tabelas, os grupos entregaram a folha de resposta para a professora que as digitalizou para posterior análise. A folha foi então devolvida aos estudantes para que pudessem participar da correção coletiva de suas respostas. Quanto à correção coletiva, esta foi realizada no quadro com a professora encaminhando sua realização, porém com a participação de todos os grupos. Nesta ocasião, a professora aproveitou para apontar e corrigir erros que haviam sido cometidos.

Com base nos comentários feitos pelos estudantes, pode-se perceber que muitos estudantes não se recordavam ou mesmo sabiam como efetuar a potenciação, e nem sequer tinham conhecimento de suas propriedades. Por conta disso, uma folha contendo exercícios sobre potenciação, não prevista inicialmente, foi elaborada e aplicada num momento seguinte. O objetivo destes foi recordar/apresentar a potenciação como a multiplicação de fatores iguais e algumas de suas propriedades, como a que diz respeito ao expoente inteiro negativo.

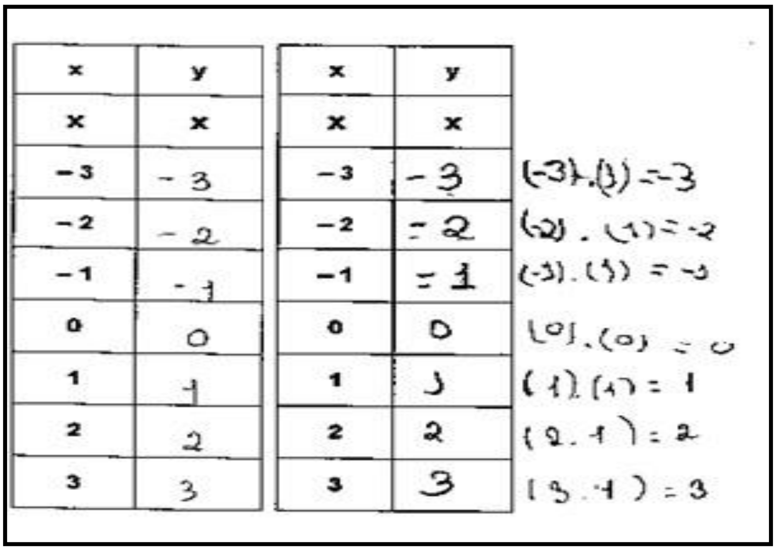
É importante mencionar que, a princípio, não tínhamos considerado o uso de calculadora, mas, em decorrência da natureza dos valores de x que foram dados, e pelo fato de que as tabelas das funções logaritmo e seno, não foram preenchidas, seu uso foi sugerido

Para preparar os dados coletados, desta atividade, para análise, todas as respostas escritas pelos estudantes e registradas na folha foram transcritas para uma planilha do Excel®, onde, na primeira coluna, identificamos os integrantes de cada grupo, e nas demais reproduzimos tudo o que foi escrito pelos estudantes.

Segue a análise das respostas de todas as tabelas das funções dadas.

4.1.2.1 Y= x: uma cópia.

Dos treze grupos participantes, apenas um grupo apresentou o algoritmo da multiplicação por 1 (tabela 2), os demais tão somente copiaram/ repetiram os valores de x.



x	y
x	x
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3

x	y	
x	x	
-3	-3	(-3).(1) = -3
-2	-2	(-2) . (1) = -2
-1	-1	(-1).(1) = -1
0	0	(0).(0) = 0
1	1	(1).(1) = 1
2	2	(2 . 1) = 2
3	3	(3 . 1) = 3

Figura 7 – Tabela da multiplicação: atividade 2

O preenchimento da tabela da função y = x não exige o desenvolvimento de cálculos e algoritmos, propriamente ditos. Bastava que os estudantes percebessem que sendo y igual a x, então se x era -3 então y também seria. Daí a percepção manifestada e expressa na discussão no grupão de que a função y igual a x é como uma cópia onde na coluna de y copia-se os respectivos valores dados na coluna de x.

Observamos aqui que os estudantes tendo sido encorajados a explorarem diferentes operações usando os mesmos valores, eles verificaram que para a função dada y = x é possível entendê-la como sendo uma copia. Do ponto de vista matemático, se trata de observar semelhanças entre os valores das duas variáveis. A estratégia usada é a da comparação. Esta ação se dá em função do convite feito aos estudantes para “ explorarem as situações dadas, desenvolver e refinar as suas próprias ideias, estratégias e métodos; e refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos” (GAROFALO, 1989, *apud* SEGURADO E PONTE, 1998, p.10).

4.1.2.2 Y = x^2: uma multiplicação

Nosso olhar esteve voltado para a análise dos resultados e para a estratégia usada pelos estudantes para obtê-los. Ou seja, verificar de que forma os estudantes resolveriam as funções polinomiais e como seriam seus registros. Para a função quadrática, y = x^2, os estudantes usaram a operação de multiplicação de forma que alguns acertaram e outros erraram. De um modo geral, os estudantes que erraram entenderam “elevar ao quadrado” como sendo uma operação em que se multiplica a base pelo expoente.

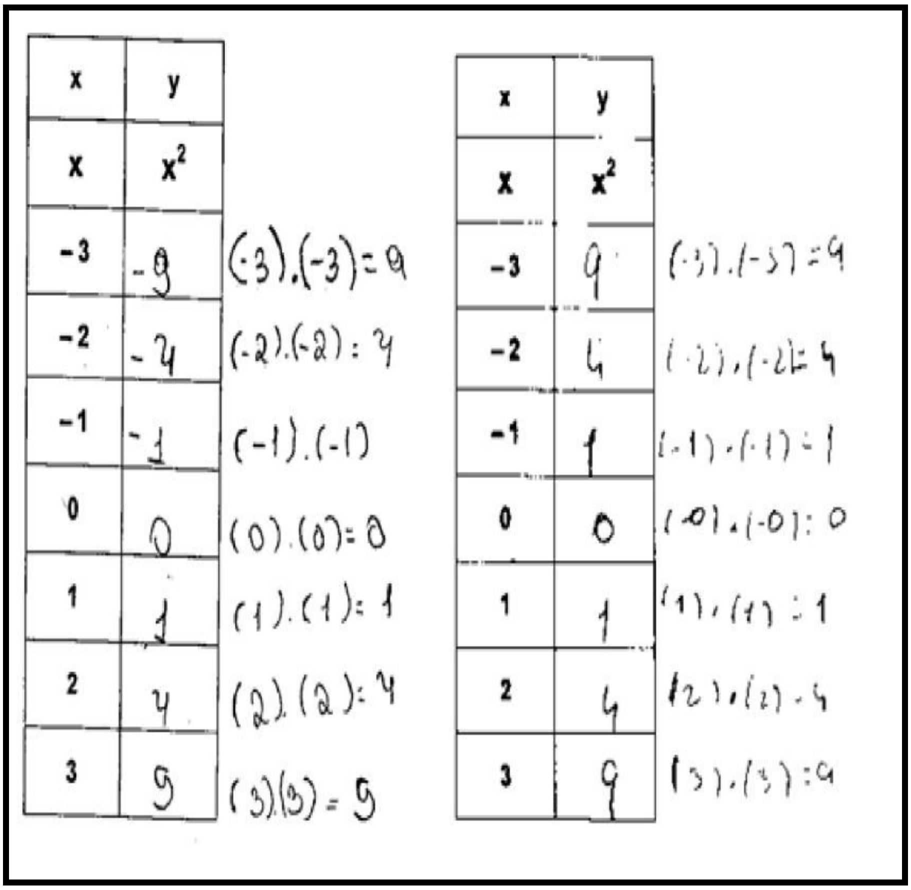
Quanto às estratégias de solução, identificamos três tipos: a) uso do cálculo mental. Ou seja, o estudante apresenta o resultado, certo ou errado, sem apresentar o algoritmo; b) os estudantes substituem o valor de x pelo seu valor numérico na função dada e opera passo a passo. Por exemplo, 3^2 = 3. 3 = 9; c) os estudantes não substituem, mas apresentam o cálculo e o resultado final. Por exemplo, o estudante faz 3.3 = 9. Apresentamos a seguir, de forma detalhada as situações verificadas.

Dos treze (13) grupos que participaram desta atividade oito (8) grupos apresentaram a substituição de x por seu valor numérico no algoritmo da potenciação e o resultado final; dois (2) apresentaram a substituição de x por seu valor numérico na lei de formação da função e o resultado final; um (1) apresentou a substituição de x por seu valor numérico tanto na lei de formação da função quanto no algoritmo da potenciação, além do resultado final; um(1) apresentou apenas o resultado final e um (1) apresentou o algoritmo da multiplicação de x por dois.

Ainda com relação aos13 (treze) grupos, cinco (5) usaram parênteses na substituição de x por seu valor numérico e oito (8) não usaram parênteses na substituição de x por seu valor numérico.

Dentre os cinco (5) que usaram parênteses, dois (2) usaram parênteses para todos os valores de x, três (3) usaram apenas para x negativo ou nulo. Cabe ressaltar que todos estes grupos apresentaram a substituição de x por seu valor numérico no algoritmo da potenciação e o resultado final.

Dos dois (2) grupos que usaram parênteses para todos os valores de x, um acertou todos os resultados finais e o outro errou o sinal do resultado final quando x era negativo, como mostra a figura 8.



x	y	
x	x^2	
-3	-9	(-3).(-3)= 9
-2	-4	(-2).(-2): 4
-1	-1	(-1).(-1)
0	0	(0).(0)= 0
1	1	(1).(1)= 1
2	4	(2).(2): 4
3	9	(3)(3) = 9

x	y	
x	x^2	
-3	9	(-3).(-3)=9
-2	4	(-2).(-2)=4
-1	1	(-1).(-1)=1
0	0	(-0).(-0): 0
1	1	(1).(1)=1
2	4	(2).(2)=4
3	9	(3).(3)=9

Figura 8 – Tabela da multiplicação: atividade 2

Dos três (3) grupos que usaram parênteses apenas para x negativo ou nulo, um (1) acertou todos os resultados finais e os outros dois (2) erraram o sinal dos resultados finais quando x era negativo, como mostrado na figura 9.

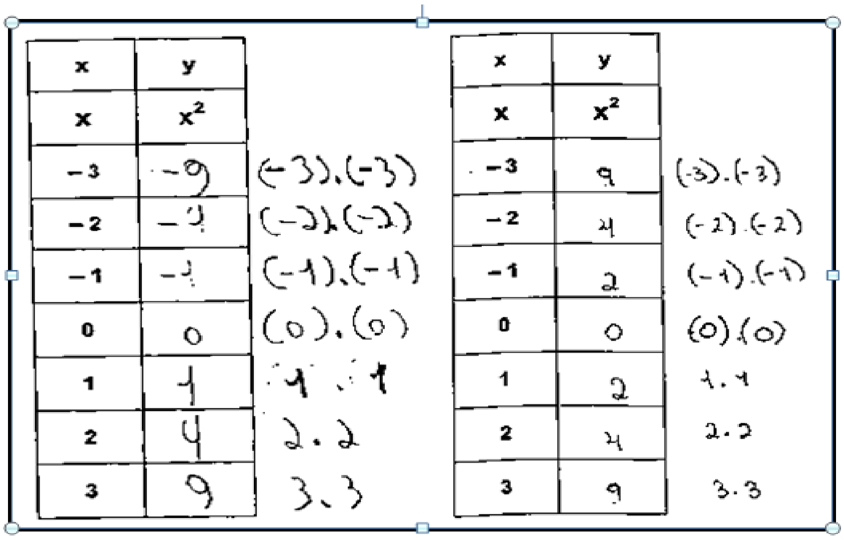


Figura 9- Tabela da multiplicação: atividade 2

Dentre os grupos que não usaram parênteses para nenhum valor de x, ocorreu de um (1) grupo apresentar apenas o resultado final; um (1) grupo apresentar a substituição de x por seu valor numérico tanto na lei de formação quanto no resultado final, além do resultado negativo; dois (2) grupos apresentarem a substituição de x por seu valor numérico somente na lei de formação e o resultado final; quatro (4) grupos apresentarem a substituição de x por seu valor numérico no algoritmo da potenciação, porém não registram o sinal negativo do número ou o fazem apenas no primeiro fator e o resultado final e um (1) grupo apresentar o algoritmo da multiplicação por dois, ignorando o sinal dos números negativos e o resultado final.

O grupo que apresentou apenas os resultados finais acertou todos, bem como os dois (2) grupos que, além dos resultados finais, apresentaram também a substituição de x por seu valor numérico na lei de formação, como mostrado na figura 10.

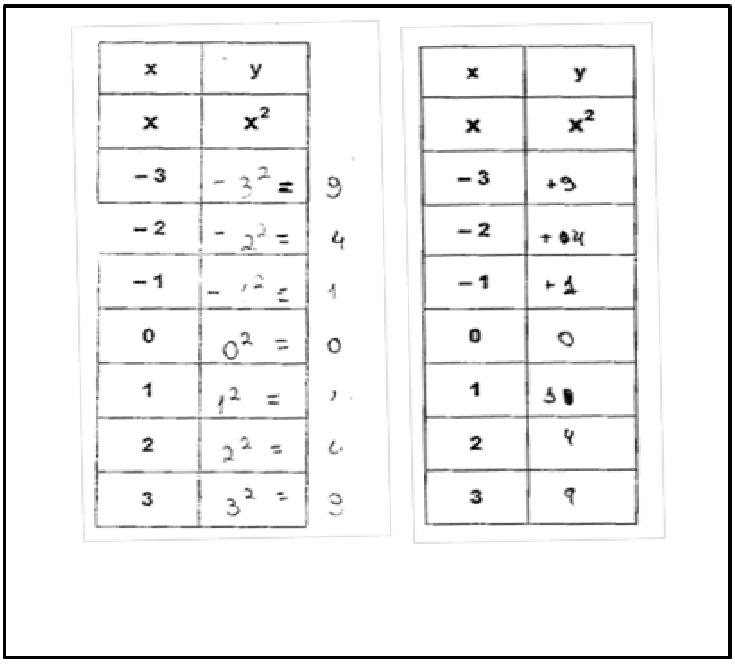


Figura 10 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Já o único grupo que apresentou a substituição de x por seu valor numérico tanto na lei de formação quanto no algoritmo da potenciação, errou os resultados finais quando x era negativo, como mostrado na figura 11.

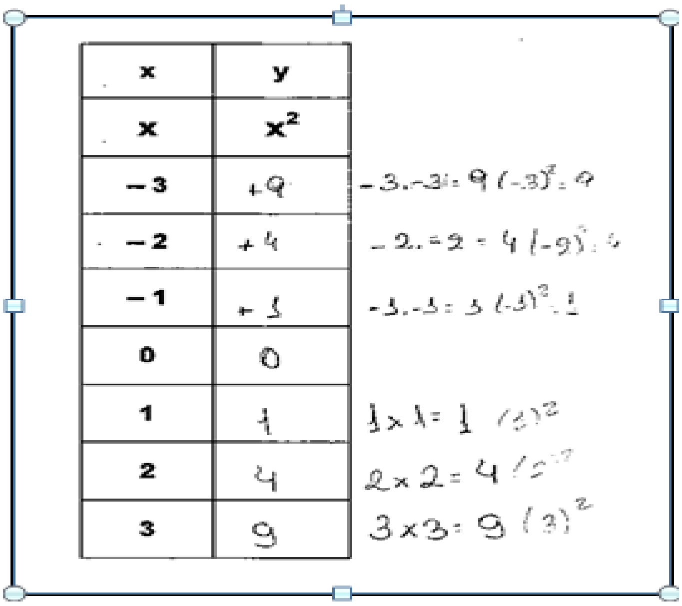


Figura 11 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Dentre os três (3) grupos que além do resultado final apresentaram também a substituição de x por seu valor numérico no algoritmo da potenciação, porém não registraram o sinal negativo do número ou o fizeram apenas no primeiro fator, um (1) acertou todos os resultados finais, o outro apenas quando x era positivo ou nulo e o outro só acertou os resultados finais somente para x = 0, x = ±1, e x = 2. Todos estes casos são mostrados na figura 12.

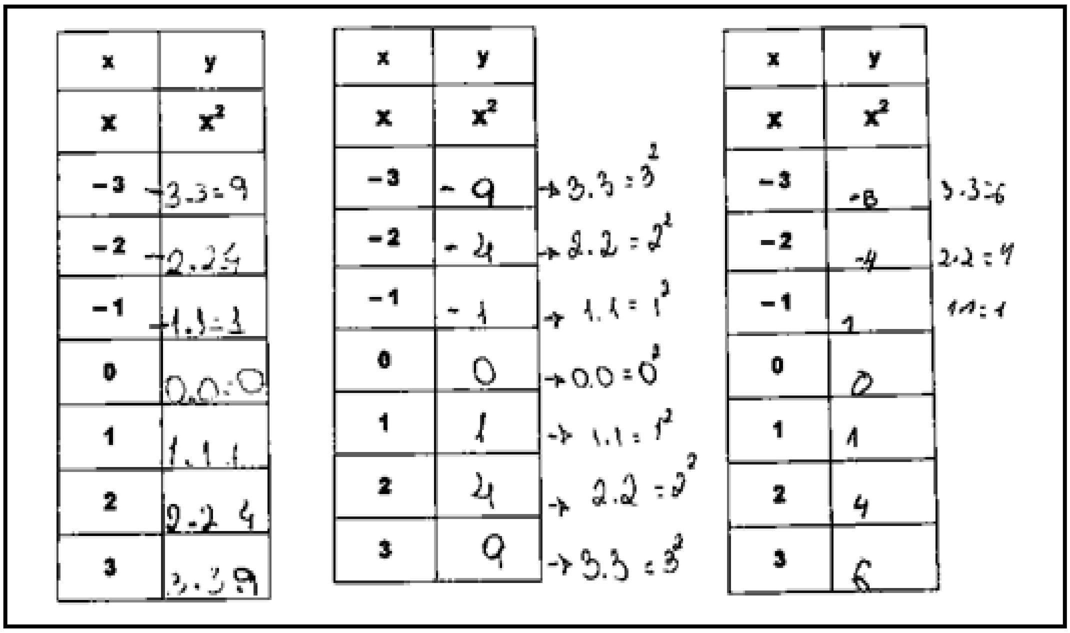
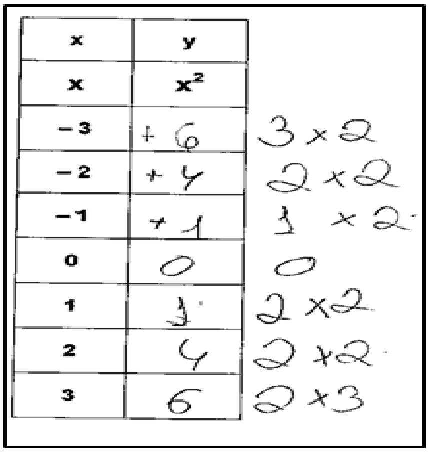


Figura 12 - Tabela da multiplicação: atividade 2

O único grupo que apresentou o algoritmo incorreto, o da multiplicação de x por dois, errou todos os resultados, com exceção para quando x = 0 e x = 2. Este caso é mostrado na figura 13.



x	y	
x	x^2	
−3	+ 6	3 x 2
−2	+ 4	2 x 2
−1	+ 1	1 x 2
0	0	0
1	1	2 x 2
2	4	2 x 2
3	6	2 x 3

Figura 13 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Vale fazer o comentário de que dois estudantes não modificaram sua forma de entender potência como sendo base multiplicada pelo expoente, mesmo após a correção e discussão no grande grupo.

No caso desses dois estudantes, que mesmo após a correção, insistiram em calcular potência como uma multiplicação da base pelo expoente, resulta naquilo que Ponte (1992) ressalta a respeito da dificuldade de se promover mudanças na maneira de pensar do outro: "é difícil mudar as pessoas, especialmente quando elas não estão empenhadas em efetuar tal mudança". Ainda de acordo com o autor, para Benavente (1990 apud PONTE, 1992), "a mudança de concepções e de práticas constitui um processo difícil e penoso em relação ao qual as pessoas oferecem uma resistência natural e de certo modo saudável".

Talvez essa resistência, por parte dos estudantes, possa ter relação com casos particulares de potências, como 2^2 que equivale a 2 . 2; ou de 0^n , onde tanto faz 0 . 0 . ... . 0 como 0 .n ou n.0 , cujos resultados são os mesmos, reforçando uma noção equivocada sobre o que venham a ser as potências, isto é, produto de fatores iguais. Neste sentido os professores precisam estar atentos aos casos particulares e sempre que possível trazê-los à luz para uma discussão e reflexões mostrando esta particularidade.

4.1.2.3 Y = X^3: uma noção mais amadurecida

No preenchimento das tabelas desta função, y = x^3, os treze (13) grupos repetiram as estratégias usadas para preencher a tabela de y = x^2. Destes, quatro (4) acertaram todos os resultados finais, cinco (5) erraram o sinal quando x era negativo, e quatro (4) erraram todos os resultados finais, exceto para x = 0 e x = 1.

O preenchimento das tabelas da função y = x^3, também exigia que os estudantes soubessem o que significava elevar x a três, isto é, calcular o produto de x por ele mesmo e depois multiplicar mais uma vez por x. Assim, como no caso da função y = x^2, o que parece, alguns alunos não sabiam, se confundiram e frequentemente erraram quando x era negativo.

4.1.2.4 Y = 2^x: uma ruptura

Dos treze (13) grupos, três (3) não completaram estas tabelas. Todos os nove (9) que a completaram apresentaram a substituição de x por seu valor numérico na lei de formação. Destes, cinco (5) apresentaram o algoritmo desenvolvido para obtenção de todos os resultados finais e todos os resultados finais, um (1) apresentou o algoritmo desenvolvido, mas não apresentou nenhum resultado final, dois (2) apresentaram todos os resultados finais, mas não apresentaram nenhum algoritmo e um (1) não apresentou nem algoritmo e nem resultado final.

Dos cinco (5) que apresentaram o algoritmo desenvolvido para obtenção de todos os resultados finais, dois (2) erraram no algoritmo quando x era negativo e consequentemente erraram também nos respectivos resultados finais; erraram também para x = 0; os outros três (3) acertaram no algoritmo e também nos resultados finais. Exemplos são mostrados na figura 14.

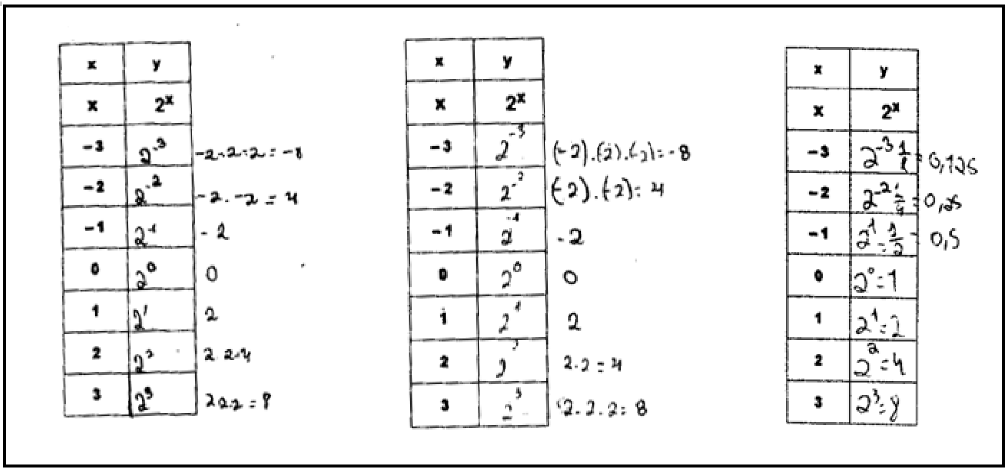


Figura 14 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Dos dois (2) grupos que não apresentaram o resultado final, um (1) apresentou o algoritmo desenvolvido, e o outro não apresentou algoritmo como mostrado na figura 15.

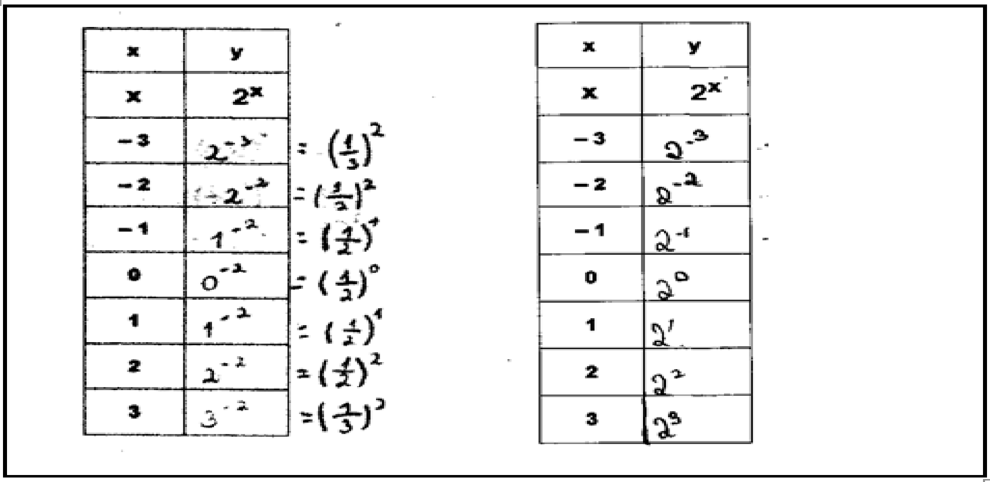
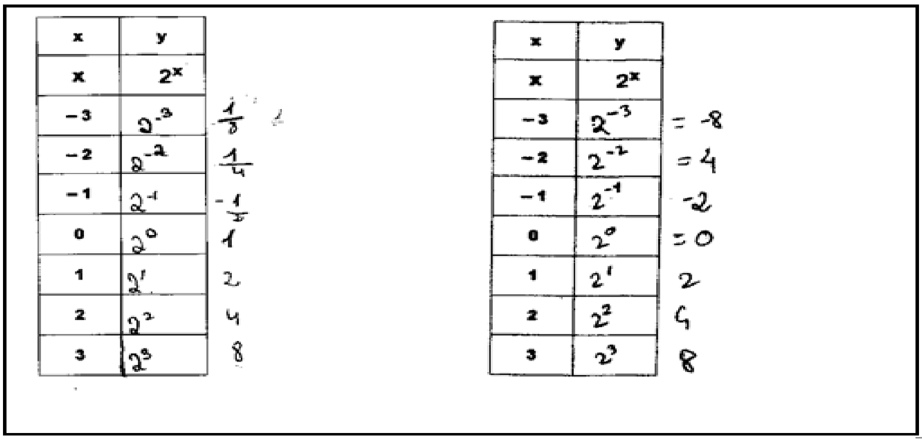


Figura 15 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Já os dois (2) que apresentaram todos os resultados finais, mas não apresentaram nenhum algoritmo, um (1) acertou todos os resultados finais, e o outro acertou apenas quando x era positivo, como mostrado na figura 16.



x	y	
x	2^x	
-3	2^{-3}	$\frac{1}{8}$
-2	2^{-2}	$\frac{1}{4}$
-1	2^{-1}	$\frac{1}{2}$
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

x	y	
x	2^x	
-3	2^{-3}	= -8
-2	2^{-2}	= 4
-1	2^{-1}	-2
0	2^0	= 0
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

Figura 16 - Tabela da multiplicação: atividade 2

Como se observa, em alguns casos os estudantes chegaram a usar as três estratégias apontadas: substituição de x por seu valor numérico na lei de formação da função, substituição de x por seu valor numérico no algoritmo da lei de formação e o cálculo do resultado final da operação. Porém vimos também que em alguns outros casos os estudantes usaram duas destas estratégias ou apenas uma: copiar o que foi escrito no verso da folha como sendo triângulo.

A seguir, apresentamos uma análise dos dados e o resultado da primeira etapa dessa atividade.

O preenchimento da tabela da função $y = 2^x$, exigia que os estudantes estivessem atentos para o fato que ali x era expoente, e que a base era fixa, sempre 2. Isso parece de fato ter ocorrido, uma vez que todos os grupos que preencheram esta tabela fizeram a substituição de x na lei de formação, mesmo quando nas anteriores muitos não haviam feito. Ocorreu, no entanto, foi que muitos usaram o mesmo algoritmo tanto para expoentes negativos como para positivos, o que acabou gerando alguns resultados incorretos. Outro ponto que chama a atenção é que parece haver uma ruptura nesse momento: é como se os estudantes, tendo a base fixa e o expoente variando, não compreendessem se tratar da operação que vinha executando até então, tendo a base variando e o expoente fixo.

Aqui podemos destacar o papel mediador das concepções, que de acordo com Thompson (1992 apud GUIMARÃES, 2010), "surgem a mediar [...], como que se interpondo" a relação do sujeito com uma determinada situação, gerando, em sua opinião, interferência no modo como a percebe e interpreta. Para a autora, a percepção que o sujeito tem de determinada situação com a qual se depara, é elaborada a luz das suas concepções, e "dará origem a expectativas consideravelmente bem estabelecidas, embora inconsistentes, relativamente a situações que venham na sua sequência" (THOMPSON, 1992 apud GUIMARÃES, 2010). No caso da função $y = 2^x$, os estudantes se deparam com um formato que já reconhecem, porém são forçados a romper com um paradigma até então vigente, de que a base varia enquanto que o expoente permanece fixo mudando agora para a situação em que a base permanece fixa e o expoente varia. Para romper com essa idéia é necessário que o professor tenha conhecimento de que é necessário promover um desequilíbrio nas concepções vigentes do estudante, reforçando assim, aquilo que vem sendo dito por Ponte (1992), de que, mudança nas concepções, supõe abalos muito fortes, e que gerem grandes desequilíbrios.

4.2 Continuando com preenchimento das tabelas, um retorno...

Feito isso, retomamos a Tarefa 2, a partir das tabelas que ainda faltavam. Ou seja, y = log e y= sen x.

As tabelas das funções $y = \log_2 x$ e $y = sen(x)$ exigiam que os estudantes soubessem a definição de logaritmo ou que tivessem disponível uma tabela com os valores de seno dos ângulos. Ainda assim, mesmo que não soubessem sobre ambos, poderiam ter apenas substituído x por seu valor numérico na lei de formação, o que nenhum grupo fez.

Cabe ressaltar que foi solicitado aos estudantes que registrassem quais foram os passos dados ao calcular o valor da variável dependente (y), usando os valores informados da variável independente (x) e a lei de formação.

O que concluímos, diante de tudo que foi exposto, é que foram poucos os casos em que os estudantes prescindiram de fazer a substituição de x por seu valor numérico em alguma etapa dos cálculos executados, o que nos leva a conjecturar que a substituição talvez seja uma ação importante para eles, diante da tarefa de calcular o valor da variável dependente.

Como já foi mencionado os estudantes não sabiam o que era logaritmo e não preencheram a tabela da função logarítmica. Do mesmo modo, não sabiam qual era o valor do seno para ângulos não-notáveis como -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3 e não preencheram a tabela da função trigonométrica. De todo modo, nenhum grupo ao menos substituiu x na lei de formação dessas funções.

Assim, na segunda etapa dessa atividade, realizada no dia 19 de abril, recomendamos que usassem a calculadora dos seus telefones celulares para obtenção dos valores do seno. Informamos que seria explicado o que era logaritmo tão logo todos tivessem concluído a tabela da função trigonométrica. A ideia era usar a tabela da função exponencial de base 2 para trabalhar a noção de logaritmo e expoente.

Quando os grupos levaram suas folhas para que a professora as digitalizasse, algumas apresentavam preenchida a tabela da função logarítmica. A professora então passou a perguntar aos grupos como chegaram aos valores do logaritmo, e eles disseram ter sido através do uso da tecla da calculadora com essa função.

4.2.1 Calculadoras: Uma Saída

Os resultados obtidos por meio do uso da calculadora, no caso a função seno, que estavam na maioria dos celulares era a mesma, porém alguns aparelhos informavam valores divergentes. A professora tendo percebido isso procurou descobrir a causa e investigou a primeira possibilidade que lhe ocorreu: a das unidades de ângulo não serem todas grau. De fato, quando solicitou os aparelhos que apresentavam valores divergentes dos demais, porém iguais entre si, verificou que era esta era a questão. Alguns aparelhos estavam programados para trabalhar com grau e outro com radiano.

Diante dessa descoberta a professora aguardou até a correção coletiva para discutir a questão com os estudantes.

Uma vez que concluiu a correção da tabela da função logarítmica, a professora passou então a explicar para os estudantes que logaritmo é o nome dado ao expoente de uma potência em determinado contexto matemático e, usando a tabela da função $y = 2^x$ explicou, por exemplo, que o logaritmo de 8 na base 2 era 3, o de 4 era 2, o de 1 era 0, e assim por diante. E aproveitou para elogiar os grupos pela iniciativa de fazer uso da tecla log da calculadora para calcular o logaritmo, explicando que, no entanto, nas calculadoras a tecla só funciona para calcular logaritmos da base 10 e a que eles tinham era 2. Nessa hora todos queriam saber então como fazer já que, através da tabela, eles não tinham como chegar ao logaritmo de 3 na base dois e nem dos números negativos.

O primeiro passo da professora foi explicar que, sendo a base positiva, nunca haveria de se obter uma potência negativa. Ora, se potenciação é multiplicação e multiplicação de números positivos só gera números positivos, não tem como. Todos pareceram aceitar este fato e não questionaram; no entanto, insistiam em perguntar como então fariam para achar o logaritmo do zero e dos positivos.

Para zero, ela propôs uma reflexão: quando é que uma potência é zero? Uns poucos responderam que seria quando a base fosse zero, informação que a professora confirmou e apresentou alguns exemplos. Com relação às positivas, para 1 e 2 pediu que consultassem a tabela da função exponencial, mas o problema então ficou sendo determinar o logaritmo de 3 na base 2. O jeito encontrado foi provocar outra reflexão: “se dois elevado a dois dá quatro e dois elevado a três dá oito, então? ”

Fez-se um silêncio, e daí um estudante pediu que a professora repetisse. Quando ela terminou de repetir ele disse: “Ué, teria que ser um número entre dois e três então, mas não tem como, não tem número inteiro entre dois e três! ”

A professora provocou o estudante com a seguinte pergunta: “mas quem disse que tem que ser inteiro? ” E daí, com auxílio da calculadora, foram buscando aproximações até que foi negociado que uma boa aproximação seria 2 elevado a 1,59.

Desse modo além de preenchermos a tabela, a atividade propiciou uma oportunidade para pensarmos o uso da calculadora nas aulas de matemática. Sem esse recurso não teríamos conseguido avançar muito no preenchimento da tabela da função logarítmica e também da trigonométrica, uma vez que não dispúnhamos de uma tabela com os valores de seno e nem de logaritmos.

Com relação ao fato de os estudantes terem tido a iniciativa de usar a tecla log da calculadora para obter o logaritmo, consideramos este como um indicador de que os estudantes corresponderam bem aos desafios que a atividade apresentou, e nisso se configurou para nós uma estratégia que foi usada por eles.

Resumidamente podemos dizer que, para os estudantes, essa atividade possibilitou uma percepção acerca dessas funções mais voltadas para seus aspectos operacionais. A percepção desses estudantes acerca da função $y = x$ era que se tratava de uma cópia; das função $y = x^2$ e $y = x^3$, um tipo particular de multiplicação, com várias regras diferentes e o mesmo sobre a função $y = 2^x$, sendo que, nesse caso, observou-se um estranhamento inicial pelo fato de que quem variava era o expoente e não mais a base. É pertinente comentar que muito estudantes foram confirmar com a professora se era mesmo assim que “era agora”, isto é, se era o expoente quem variava.

No caso da função logarítmica a percepção dos estudantes era a de que se tratava de uma busca por um expoente. E da função trigonométrica chamou-lhes atenção o fato de que, assim como na quadrática, as imagens dos números simétricos serem simétricas também. Os estudantes não chegam a usar esses termos, mas apontaram o que haviam observado. Houve uma estudante, por exemplo, que disse: “Professora, eu noto que nessa última tabela os números (referindo-se à imagem) são iguais, só muda o sinal. E que também dá sempre “zero alguma coisa”. ”

Ou seja, essa estudante, assim como outros, percebeu duas características importantes da função trigonométrica seno, que é o fato de ser uma função periódica e cuja imagem varia de – 1 a 1.

Consideramos que essa atividade, além de ter nos ajudado a identificar as estratégias dos estudantes diante da tarefa de obter a imagem de uma função, a partir de um domínio definido e de uma lei de formação dada, possibilitou-nos tomar conhecimento das suas percepções e concepções acerca daquelas funções.

É importante ressaltar que esse resultado não esgota a investigação acerca das concepções dos estudantes sobre as funções. Ele representa um primeiro passo, o nosso primeiro passo. A partir desse material, acreditamos ter a possibilidade de planejar melhor a proposta de estudo de funções.

Segundo Ponte (1990), os estudantes precisam ter contato com as funções “bem comportadas”. Compartilhando do ponto de vista do autor, investimos em sua ideia ao elaborar essa atividade. Fato este que justifica a seleção das seis funções que foram apresentadas e os valores inteiros do domínio.

Como havia pouco tempo que os estudantes tinham começado a estudar funções, nossa proposta trazia também em seu bojo a intenção de mostrar-lhes o que veriam pela frente, com quais funções teriam que lidar. Era nossa intenção, também, desse modo, propiciar uma oportunidade para que fizessem descobertas a respeito delas e de alguma de suas características.

Nesse sentido, acreditamos ter conseguido o intento. O desafio agora é pensar como, a partir desse material coletado, elaborar o planejamento de uma sequência de atividades a serem propostas para os estudantes, com intuito de introduzir o estudo de funções e de elaborar formas de intervir de modo que as concepções que se formem acerca do conceito matemática estejam o mais próximo possível de como a matemática a concebe. É como tentar construir uma ponte de modo a fazer com que o aluno saia de onde se encontre e consiga se aproximar, tanto quanto possível, de onde precisa chegar.

O autor também chama a nossa atenção para o fato de que o ideal seria trabalhar a partir de demandas reais, dando mais sentido a tudo que se estiver fazendo. Isso ocorreu, quando precisamos calcular o logaritmo de 3 na base dois. Foi uma situação que se apresentou e que oportunizou lançarmos mão dos únicos recursos que dispúnhamos naquela ocasião e fomos bem sucedidos.

4.3 Atividade 2.1: Quadrado Não é Dobro. Verdadeiro ou Falso?[2]

Essa atividade constitui-se numa tarefa composta de quatro itens que visam evidenciar as particularidades de algumas potências generalizadas pelos estudantes, a saber: $a^n = a.n$ e $a^n = n^a$. De acordo com Cunha, Oliveira e Ponte (1995), o tema Potência é considerado árido pelos professores. Para resolver, mudar essa visão, os autores apostam na elaboração e implementação de atividades investigativas como forma de explorar o tema. Os resultados, segundo estes autores, é que:

> [...] estas atividades promovem o desenvolvimento de capacidades de ordem superior e processos matemáticos pouco comtemplados no tratamento de temas programáticos, possibilitando diferentes graus de consecução a alunos com capacidades diferentes, permitindo-lhes trabalhar no seu próprio ritmo; estimulando o professor (CUNHA *et al*, 1995, p. 167).

[2] A atividade 2.1 foi inspirada numa atividade elaborada por Helena Segurado e apresentada por Ponte (1990) no artigo “Investigar, ensinar e aprender”. As questões 2 e 4 da atividade 2.1 correspondem as questões 1 e 3 da atividade de autoria de Segurado (2002).

A atividade 2.1 foi desenvolvida em função da análise dos registros escritos da atividade anterior, atividade 2, em que se pode constatar, mediante a análise dos erros cometidos pelos estudantes no cálculo das potências, que estes possuíam dificuldades diversas com esta operação. Optamos, então, por uma abordagem que favorecesse o diálogo e a reflexão do estudante e entre os estudantes, e em que houvesse a oportunidade de a professora/pesquisadora discutir com eles os erros que foram cometidos e possíveis causas. Desse modo, era nosso intuito além de alertá-los, também ouvir o que tinham a dizer a respeito do porquê terem cometido esses erros.

Optamos por elaborar tarefas que contemplassem cada uma das dificuldades que foram observadas durante a análise da atividade 2, como, por exemplo, a que se caracteriza por confundir elevar uma base a um certo expoente com multiplicar essa base por esse expoente.

Os estudantes foram convidados a respondê-las individualmente, pois era também nosso interesse identificar quem errava e no que errava.

Em seguida apresentamos as tarefas que compõem a atividade 2.1:

1. Elabore as tabelas das funções $y = x, y = x^2$ e $y = 2x$ para $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

1.1 Compare as três tabelas e escreva o que observou.

2. Repare que $2^2 = 4$ e que $2.2 = 4$. Será sempre assim? Experimente nos seguintes casos: $0^2, 0.2$; 4^2, 4.2; 3^3, 3.3; $10^2, 10.10$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{2}.3$ e $\left(\frac{5}{3}\right)^4, \frac{5}{3}.4$;

3. Volte no item 1. Você mudaria algo? O quê? Apresente aqui a(s) mudança(s), se houver.

4. Pra pensar! $4^2 = 16$ e $2^4 = 16$. Será sempre verdade que $a^n = n^a$? Experimente usando outros números.

O tempo de realização da atividade, incluindo sua correção, coletivamente, foi de dois tempos de cinquenta minutos.

Apresentamos a seguir a análise das respostas dos estudantes a cada um dos itens.

Na tarefa1, recalcular as tabelas das funções y= x, y= x^2 e elaborar uma nova, y= 2x, verificamos que, de um modo geral, os estudantes acertaram os itens depois da intervenção feita através da correção coletiva ainda por ocasião da realização da atividade 2. Entretanto, encontramos erros nas respostas de alguns estudantes. Ocorre, contudo, que com a atividade 2.1, pudemos perceber exatamente os pontos de conflito para cada estudante. Ou seja, para estes estudantes esse ponto era o de operar com números negativos, e encontramos três tipos de erros ao analisar suas respostas:

1- Multiplicaram os números negativos por dois como se fossem positivos (na tabela de 2x), e não diferenciaram 2x de x^2. Parece-nos que os estudantes usaram, na tabela de x^2, a regra da potenciação, que, ao elevar um número negativo a um expoente pode resultar num número positivo, porém efetuando a multiplicação da base pelo expoente. (Ver figura 17)

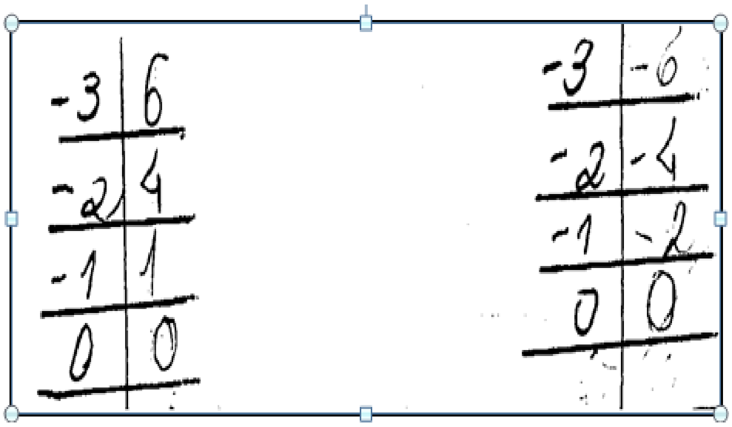


Figura 17 – Erro Tarefa 1 da atividade 2.1

Notem que o mesmo erro é cometido na tarefa 2. (Ver figura 18):

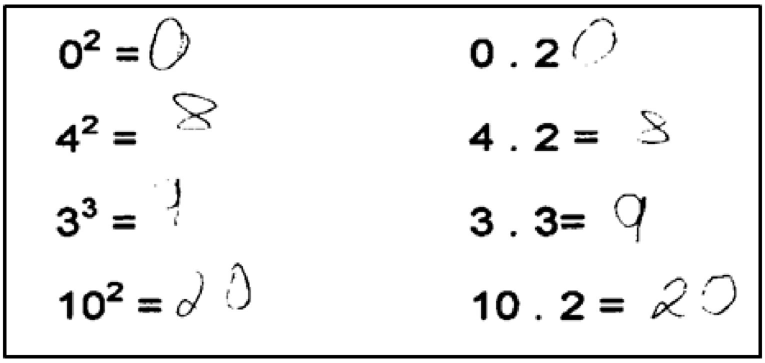


Figura 18 – Tarefa 2 da atividade 2.1

Um dos estudantes que também cometeu os erros apontados esclarece que ao responder aos itens acima mencionados o fez com base no conhecimento que possuía. (Ver figura 19).

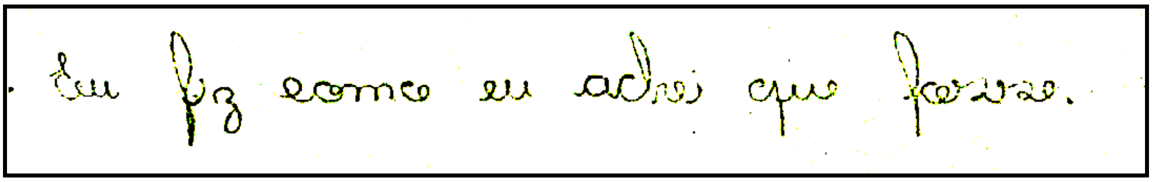


Figura 19 – Resposta de um estudante, tarefa 3

2- Ignoraram o sinal negativo e multiplicaram por dois. (Ver figura 20)

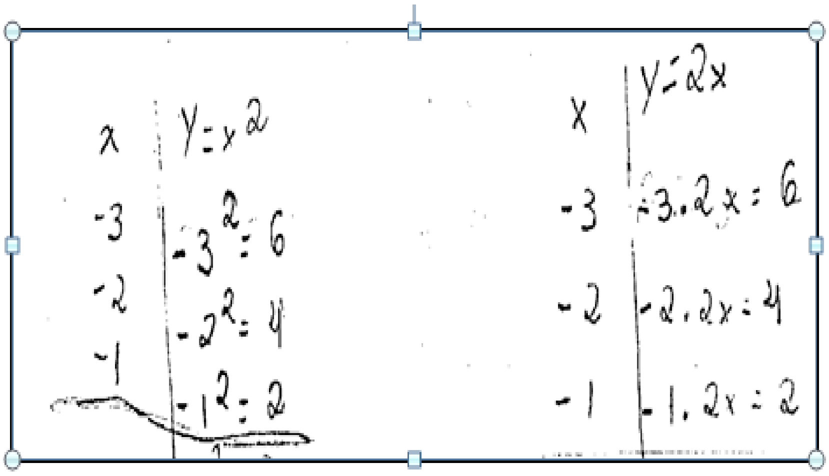


Figura 20 – Tarefa 3 da atividade 2.1

3- Multiplicaram, na tabela de y= x^2, os valores negativos por 2 (ignorando-lhes o sinal) e elevaram ao quadrado os positivos. (ver figura 21)

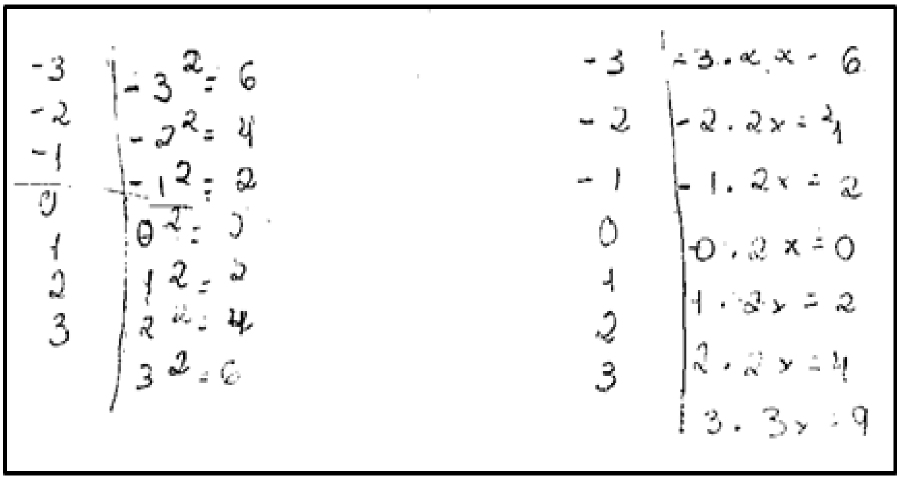


Figura 21 – Tarefa 4 da atividade 2.1

Na tarefa 1.1 - Compare as três tabelas e escreva o que observou – os estudantes, no geral, escreveram não haver nenhuma relação entre as tabelas $y = x, y = x^2$ e $y = 2x$.

Na tarefa 3 – Volte no item 1. Você mudaria algo? O quê? Apresente aqui a(s) mudança(s), se houver – a maioria dos alunos respondeu que não. Cabe ressaltar que nesse grupo incluem-se tanto estudantes que acertaram as tarefas 1 e 3 quanto àqueles que os erraram. Além disso, os estudantes que erraram, dão a entender que não “veem” relação entre o que fizeram na tarefa 1 e o que fizeram na tarefa 2. Chegando até mesmo a afirmar que não mudariam nada nem em uma e nem em outra.

4.4 Ainda sobre a Primeira Atividade

Estamos todos sempre retornando, retornam para rever, retornam para aprofundar, retornam para seguir em frente. Enfim, retornam para voar, crescer e mudar. Na escola e, de modo particular, num ambiente de aprendizagem, retomadas e avanços são constantes.

De modo a promover uma reflexão nos estudantes acerca das funções para as quais elaboraram tabelas, solicitamos que elaborassem e explorassem seus gráficos procurando registrar tudo que perceberam.

Tarefa 1: Trace, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2x$ e $y = -2x$ b) $y = 3x$ e $y = -3x$ c) $y = 4x$ e $y = -4x$

Analisando cada item o que observou?

Tarefa 2: Agora, trace o gráfico das funções $y = -4x$, $y = -3x$, $y = -2x$, $y = 2$, $y = 3x$ e $y = 4x$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, relate aqui o que observou.

Figura 22 – Tarefas 1 e 2.

O objetivo da primeira tarefa foi levar os estudantes a observarem que o gráfico da função linear é uma reta, que sempre passa pela origem e cuja inclinação tem relação com o coeficiente *a* da sua representação algébrica y = *a*x.

Na figura 23, apresentamos um esboço dos gráficos elaborado por uma dupla de estudantes e que representa o que todas as demais duplas elaboraram.

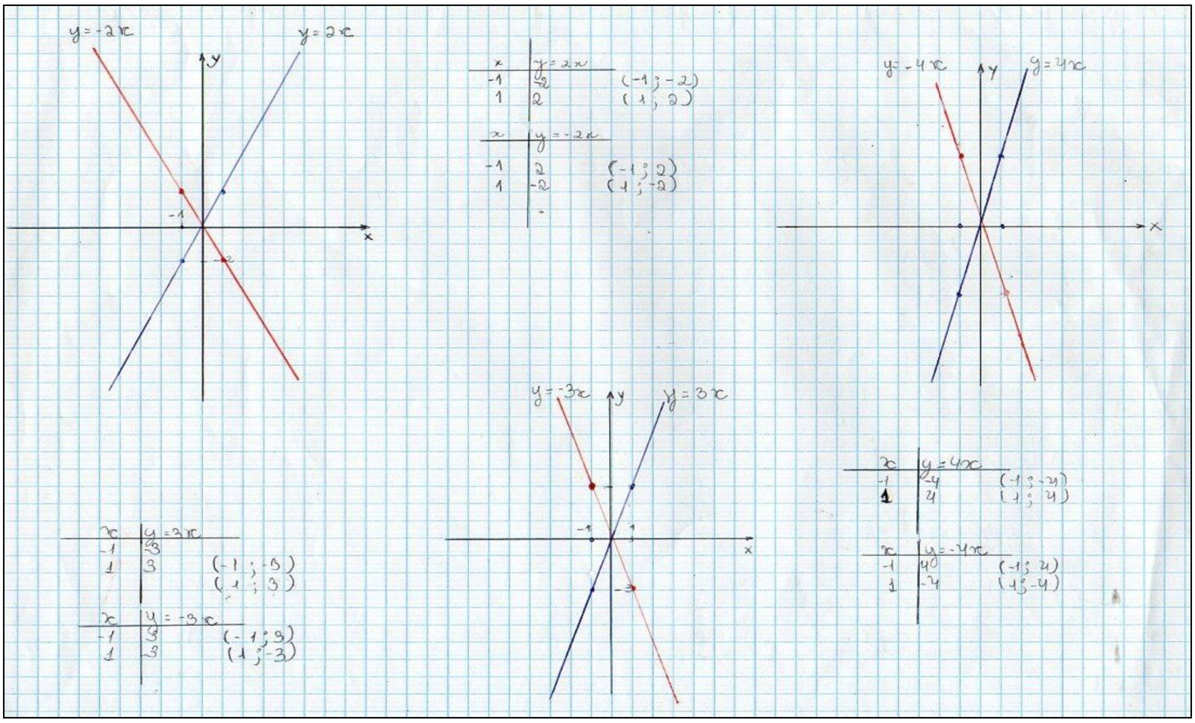
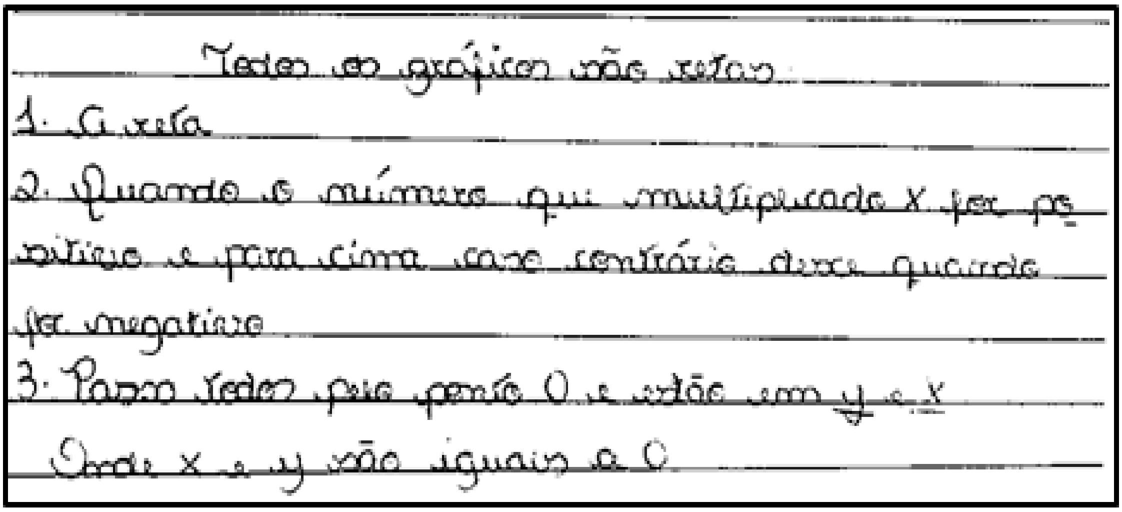


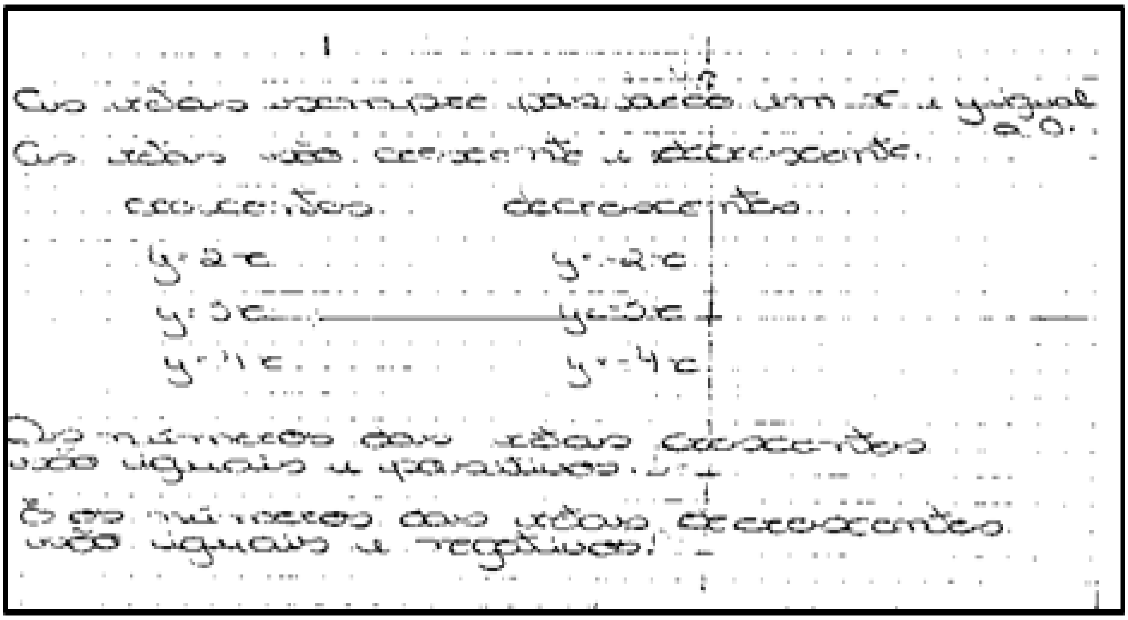
Figura 23 – Exercício 4 da atividade 2.1

Os estudantes trabalharam em duplas sem dificuldade, tendo percebido rapidamente a relação entre o coeficiente *a* e a inclinação da reta e o fato de que as retas sempre passavam pela origem, como mostram os relatos apresentados a seguir (ver figuras 25,26,27,28,e 29):



Todos os gráficos são retas
1. A reta
2. Quando o número que multiplicado X for positivo é para cima caso contrário desce quando for negativo
3. Passa todos pelo ponto 0 e estão em y e X
Onde X e y são iguais a 0

Figura 24 - Relato de uma das duplas

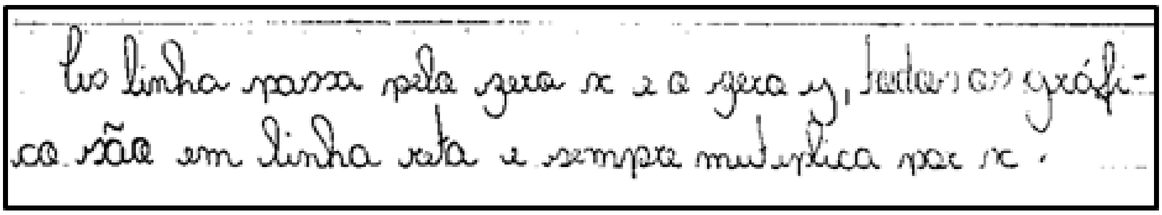


As retas sempre passarão em x e y igual a 0.
As retas são crescente e decrescente.

crescentes.	decrescentes.
$y=2x$	$y=-2x$
$y=3x$	$y=-3x$
$y=4x$	$y=-4x$

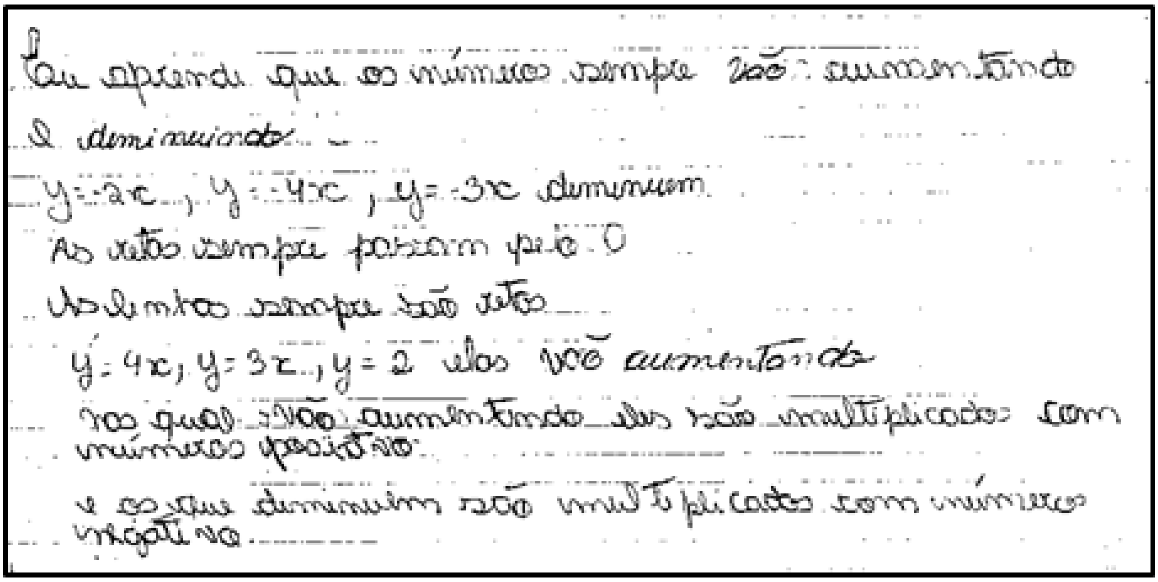
Os números das retas crescentes são iguais e positivos.
E os números das retas decrescentes são iguais e negativos!

Figura 25 - Relato de uma das duplas



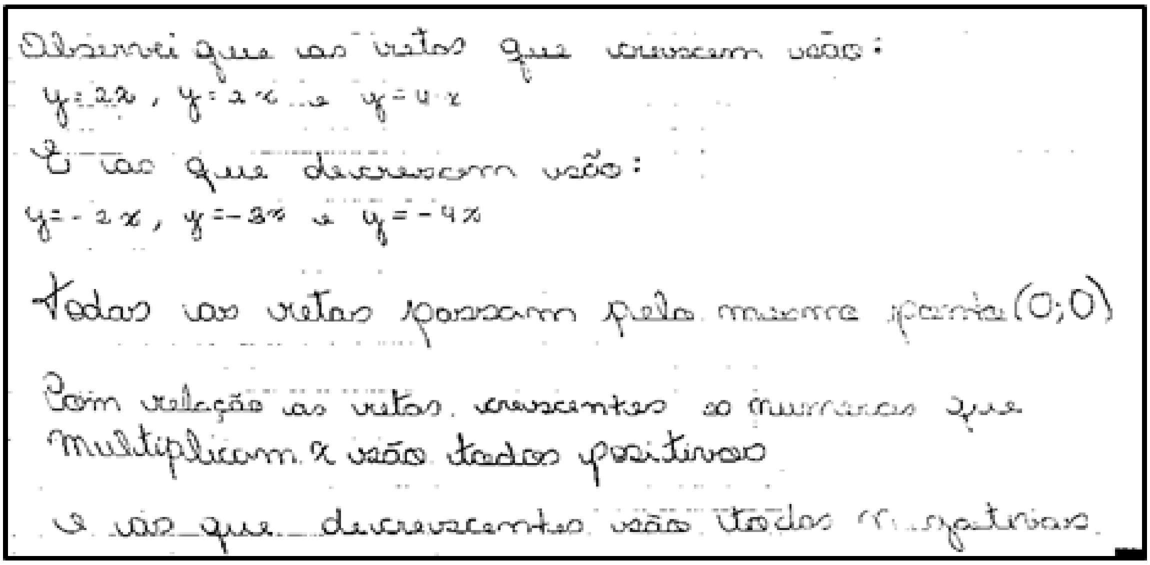
A linha passa pelo zero x e o zero y, todos os gráfico são em linha reta e sempre multiplica por x.

Figura 26 - Relato de uma das duplas



Eu aprendi que os números sempre vão aumentando
e diminuindo.
$y=-2x$, $y=-4x$, $y=-3x$ diminuem.
As retas sempre passam pelo 0
Os elementos sempre são retos
$y=4x$, $y=3x$, $y=2$ elas vão aumentando
nos quais vão aumentando elas são multiplicados com números positivo.
e os que diminuem são multiplicados com números negativo.

Figura 27 - Relato de uma das duplas



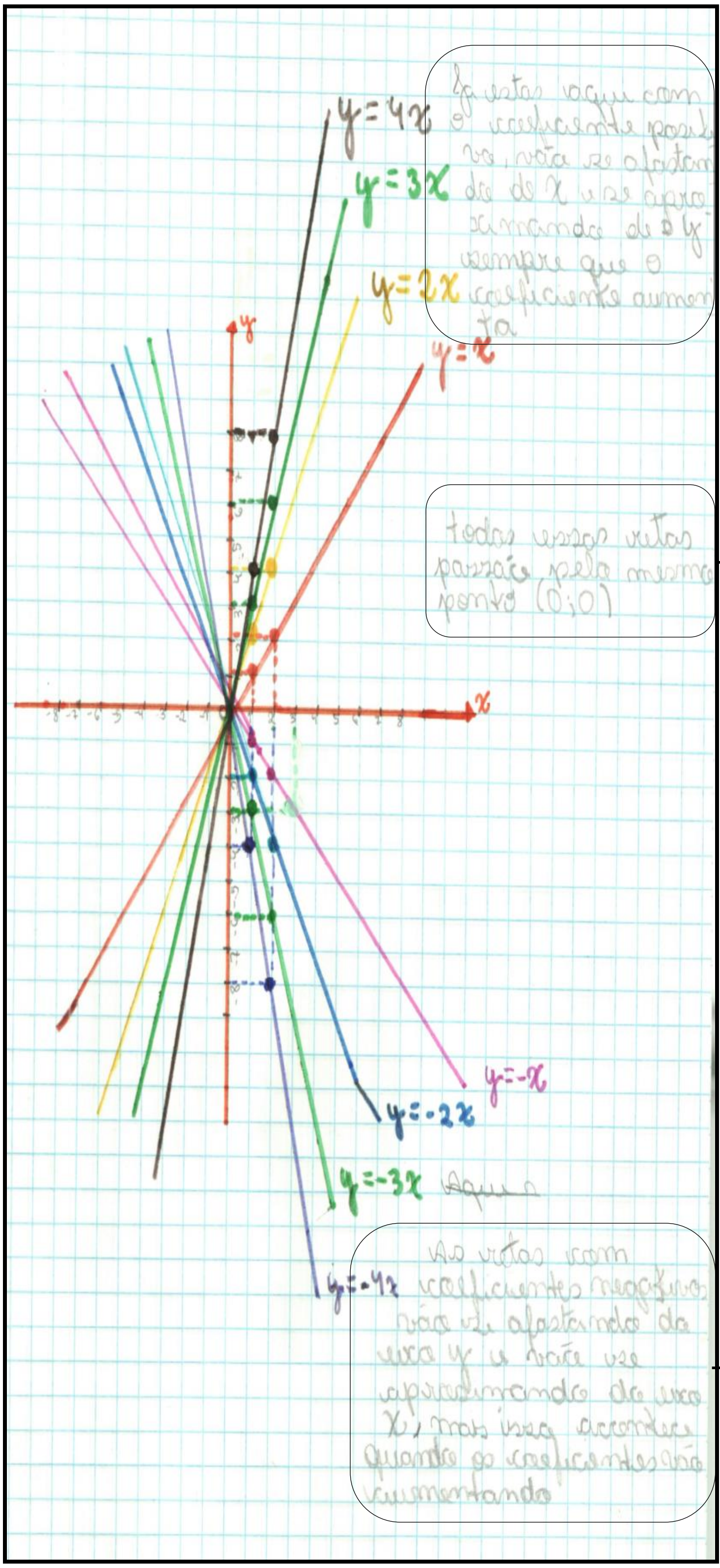
Observei que as retas que crescem são:
$y=2x$, $y=2x$ e $y=4x$
E as que decrescem são:
$y=-2x$, $y=-3x$ e $y=-4x$
Todas as retas passam pelo mesmo ponto (0;0)
Com relação as retas crescentes os números que multiplicam x são todos positivos
e as que decrescentes são todos negativos.

Figura 28 - Relato de uma das duplas

Quanto ao que observaram com a tarefa 2, quando traçaram o gráfico das funções y = – 4x, y = – 3x, y = – 2x, y = 2, y = 3x e y = 4x, todos num mesmo plano cartesiano, os estudantes escreveram que:

- à medida que o coeficiente *a* aumentava, as retas com o coeficiente *a* positivo se afastavam do eixo x e que as retas com coeficiente *a* negativo se afastavam do eixo y.
- quando o número que multiplica x (o coeficiente a) aumenta, mais a reta "vai ficando em pé".
- as retas vão ficando "mais em pé" se aproximando, assim, do eixo y, "quase ficando bem juntinho do eixo".

Nas figuras a seguir (figuras 29, 30 e 31) apresentamos alguns dos esboços apresentados pelos estudantes.

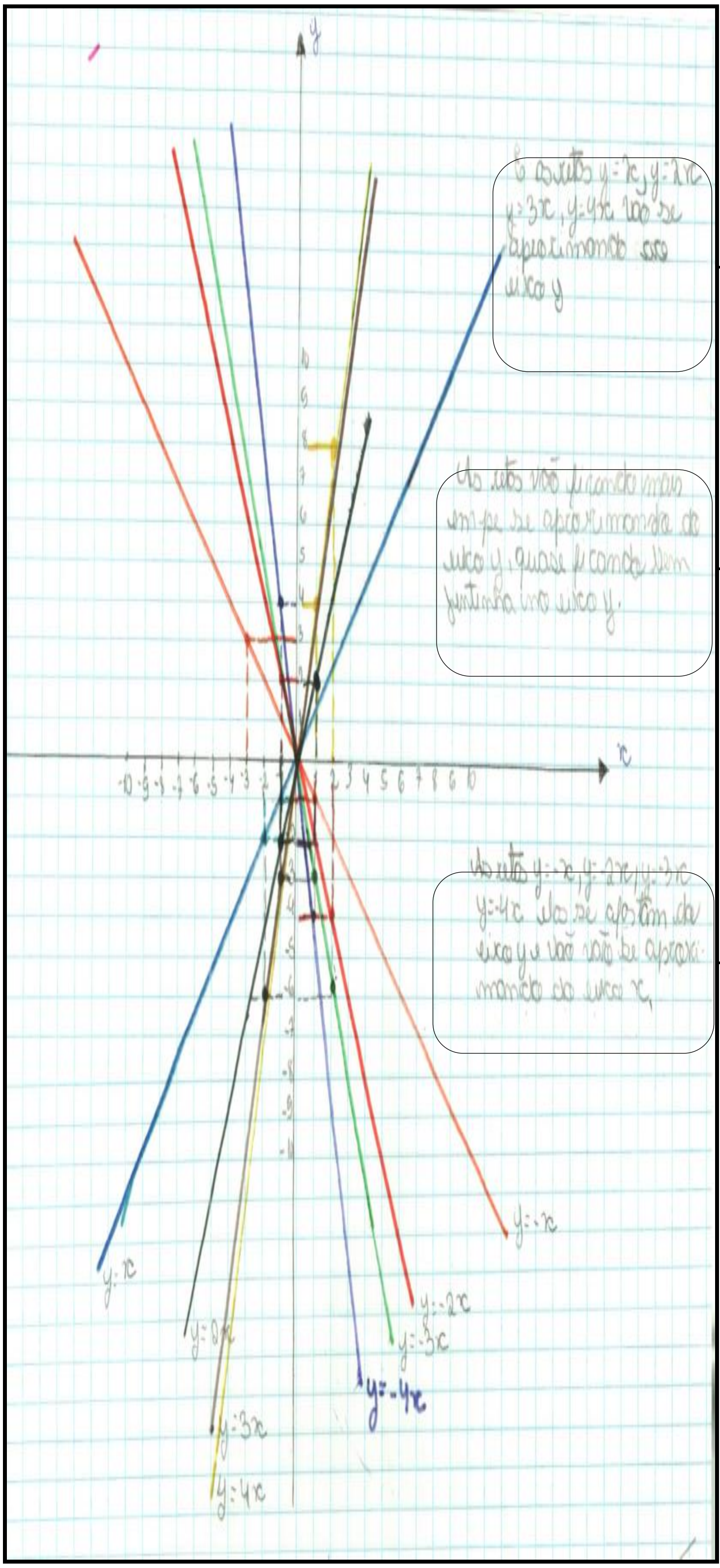


Já estas aqui com o coeficiente positivo, vão se se afastando de x e se aproximando de y sempre que o coeficiente aumenta.

Todas essas retas passam pelo mesmo ponto (0,0).

As retas com coeficientes negativos vão se afastando do eixo y e vão se aproximando do eixo x, mas isso acontece quando os coeficientes vão aumentando.

Figura 29 - Esboço apresentado por uma dupla



E as retas y = x, y = 2x, y = 3x, y = 4x vão se aproximando do eixo y.

As retas vão ficando em pé se aproximando do eixo y, quase ficando bem juntinho do eixo y.

As retas y = -x, y = -2x, y=-3x e y = -4x, elas se afastam do eixo y e vão se aproximando do eixo

Figura 30 - Esboço apresentado por uma dupla

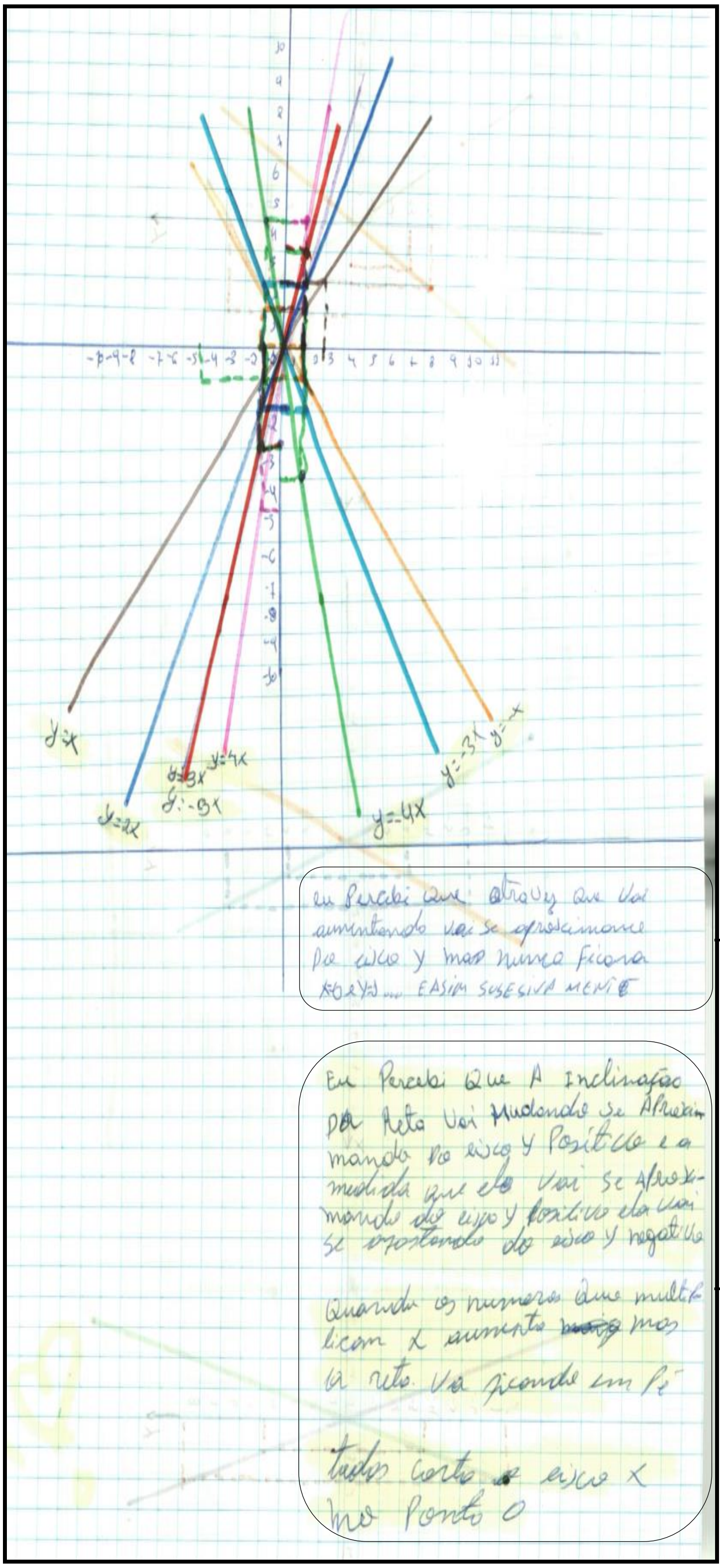


Figura 31 - Esboço apresentado por uma dupla

Eu percebi que através, que vai aumentando, vai se aproximando do eixo y mas nunca ficará x = 0 e y=1... e assim sucessivamente.

.

Eu percebi que a inclinação da reta vai mudando se aproximando do eixo y positivo, e a medida que ela vai se aproximando do eixo y positivo ela vai se afastando do eixo y negativo.

Quando os números que multiplicam x aumentam, mas a reta vai ficando em pé.

Todas cortam o eixo x no ponto 0.

No final do ano letivo, tendo o estudo de funções previsto no programa de Matemática sido concluído, consultamos os estudantes para saber o que tinham a dizer sobre funções. Essa se caracteriza como a última atividade da pesquisa de campo.

4.5 Função: o ponto de vista dos estudantes.

De modo a compreender como os estudantes que participaram do estudo entendiam o conceito de solicitamos:

Com suas palavras defina função.

A solicitação foi feita ao final do ano letivo e após a conclusão do programa da disciplina Matemática, estipulado pela Secretaria de Educação e Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ). Este programa, cabe esclarecer, enfatiza a importância de que o estudante compreenda função como uma relação de dependência entre duas grandezas variáveis. No documento estão previstos além do estudo das funções polinomiais do 1º e 2º grau, o estudo das funções exponencial e trigonométrica.

Os estudantes levaram em média 50 minutos elaborando seus textos, que foram produzidos individualmente numa dia de aula.

O resultado encontra-se listado a seguir:

1. Função mesmo tendo sinais e cálculos igual as contas, ela **não é uma continha qualquer**; função **também tem a ver com gráficos**; a função leva letras, normalmente **x** ou **y**, até mesmo **F**, etc.
2. É uma coisa muito complicada.
3. Função é tudo que **deve ser cumprido**, desde **uma tarefa** até números.
4. Função é **ordem** sobre tudo.
5. É o que você **tem que fazer**, sua **obrigação**.
6. Função é a regra **que se dá na matemática, em conjunto** de números, e **ordem** ou no dia-a-dia. Acho que função é **fazer o seu trabalho**, o que sua mãe pôs **para que você faça**.
7. A função ela pode ser dada como um **gráfico**, também ela se forma com **x e y.** A função **pode ajudar de diversas maneiras**, **como em empresas** e etc.
8. **Formas práticas de** cálculo de equações.
9. **Uma matéria dada em matemática, que trabalha** com letras e diversos sinais, usando **gráficos**, **cálculos** e **números**. São utilizados os **sinais mais, menos, multiplicação, divisão.**
10. A função pode ser **fórmulas, gráficos**, **tabelas** ou **retas**. A função é **um modo de facilitar** uma **conta** quando há **números** diferentes, porém, é usada a mesma **fórmula**.
11. É **o estudo da matemática que envolve gráfico**, **tabela.**
12. Função é **gráfico** e **tabela** que contém **regras**
13. Função **é um sistema matemático que envolve multiplicação, divisão, adição e subtração;** função conta também com **números** e **letras**. Existe vários tipos de função, como, função em **tabelas**, **gráficos** e etc .
14. O que vem na minha cabeça quando fala de função **é tudo aquilo que envolve tabelas** e **gráficos.**
15. Função **é um conjunto** de **números todos ligados** uns aos outros tanto no **x** ou no **y**; os dois ligados formam uma função e da função surge o **gráfico** que é a representação

da função e para os **números** serem identificados é formada uma **retas** que representa todas as **ligações**.

16. Eu acho que função pode ser representada com **letras** e **números** que de um lado se chama y e do outro chama x; e pode ser representado por **tabelas**, **gráficos** e escritos.
17. Função é tudo aquilo que pode ou não ser dado em função de um **número** e pode ser representado de diversas formas diferentes, a em função de b, $y = x^2$, entre outros.
18. Função é como **uma tarefa que a pessoa faz, pode ser qualquer coisa**. Em matemática são as **contas**, em casa **pode ser arrumar a casa**, e por aí vai.
19. Função **são problemas que se resolve na matemática**.
20. Pares ordenados, **digramas de flechas**, **relação** **entre dois conjuntos de elementos**.
21. Função é a **relação** **entre x e y** que pode ser representada por escrito, por escala e por **gráfico**.
22. Função nos **ajuda a realizar** **contas** de maneiras mais fáceis e com mais precisão, achando assim as respostas.
23. Função são **números**, **letras**, **cálculos**, etc. Na função observo duas colunas, uma que representa o x e a outra a representando o y. Pode ter **números** inteiro negativos e positivos e frações. y será sempre o resultado do x, seja ele negativo ou positivo e também o resultado de y pode ser calculado pelo **dobro ou triplo** de x.

Procuramos destacar em cores e em negrito, informações que pudessem nos auxiliar na análise das definições de função elaboradas pelos estudantes.

A partir da análise do que foi escrito, então, e do que pudemos observar no desempenho dos estudantes durante as demais atividades, nossa impressão é de que para uma maioria ressalta-se o aspecto operacional ou o das contas e cálculos e que para outra, o aspecto numérico. Observamos ainda, que poucos estudantes parecem compreender função como uma relação entre duas grandezas ou que observem a questão variacional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Aprender leva tempo e as horas passadas na escola podem não ser suficientes para mudar as ideias que o seu cotidiano e a sua história reforçam. (Rosália M. R. de Aragão)

Vários trabalhos nas últimas décadas, têm se debruçado sobre a questão do pensamento matemático, tanto de professores quanto de estudantes, contribuindo, dentre outras coisas, para que se possa entender um pouco melhor como suas concepções, acerca da Matemática, da aprendizagem matemática ou dos conceitos matemáticos, influenciam esses, que são os protagonistas do processo educativo escolar.

O que esses estudos sugerem é que há uma relação entre as suas concepções sobre a Matemática, a aprendizagem da Matemática e sobre os conceitos matemáticos e a maneira como professores e estudantes pensam e agem frente a estes. O que tem levado diversos pesquisadores a recomendarem que os professores busquem conhecer as concepções dos estudantes e meios de as influenciar.

Como informamos no início da dissertação, nosso objetivo geral era analisar como estudantes do Ensino Médio pensam o conceito de função, quais são as suas concepções sobre esse conceito. E que iríamos procurar: (i) identificar os significados atribuídos ao termo função pelos estudantes investigados, antes de uma primeira abordagem do tema nas aulas de Matemática, na 1ª série do Ensino Médio; (ii) verificar quais as estratégias usadas pelos estudantes para completar as tabelas das funções $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ e $y = \text{sen }(x)$, exemplos prototípicos das funções estudadas no Ensino Médio, e (iii) examinar a definição de função elaborada pelos estudantes. E assim foi feito.

Quanto as estratégias usadas pelos estudantes para completarem as tabelas das funções $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ e $y = \text{sen }(x)$, pode-se verificar que estas consistiram em três: substituir o valor de x dado, na lei de formação de função, ou, substituir o valor de x dado, diretamente no algoritmo da operação matemática; ou, efetuar o cálculo mentalmente e fornecer o valor de y diretamente. Pode-se apurar, ainda, a grande dificuldade dos estudantes em operar com números inteiros, apontando a necessidade de uma intervenção para tratar do assunto, e o que nos levou a elaborar e propor aos estudantes uma atividade não prevista antecipadamente, abordando a operação de potenciação e suas propriedades. Cabe mencionar que assim como essas atividades expos as dificuldades dos estudantes em lidar com a operação potenciação, também revelou um lado proativo e dinâmico desses sujeitos que diante da descoberta de determinadas funções da calculadora científica, espontaneamente as usaram, como é o caso da tecla da função logaritmo, usada para preenche a tabela desta função. Naturalmente obtiveram resultados errados, pois a tabela proposta era do logaritmo de base dois e a calculadora só possui a tecla para calcularmos o logaritmo de base dez, mas ainda assim mostra que, munido de ferramentas adequadas, podem ousar e nos surpreender positivamente.

No que tange a concepção dos estudantes investigados, sobre função, o estudo revelou que, de modo geral, estas concepções são de natureza operacional e fortemente associadas ao processo de cálculo. Vários estudantes em suas definições fizeram alusão às operações aritméticas ou as suas representações, principalmente tabelas e gráficos. Alguns chegaram inclusive a valer-se da representação do objeto, para se referirem a ele. Não identificamos, no entanto, menção a outros aspectos do conceito, como o da variabilidade, por exemplo.

Como Mourão (2002) explica, Sfard sustenta que, no processo de aprendizagem, a primeira concepção sobre um conceito a emergir é a operacional. E que isso independe do tipo de estímulos externos aos quais sejam submetidos os estudantes, tratando-se de algo muitas vezes inerente ao próprio desenvolvimento do conceito, que muito antes mesmo de ser entendido como um conceito é algo sobre o qual as pessoas operam, com a qual lidam.

Outra questão evidenciada pelo estudo é que algumas de suas concepções de antes, sobre função, permeiam a noção que vieram a desenvolver sobre o conceito matemático, depois de estudá-lo. É o caso do estudante que diz que: "*Função é como uma tarefa que a pessoa faz, pode ser qualquer coisa. Em matemática são as contas, em casa pode ser arrumar a casa, e por aí vai".* Ou de outro, que disse*: "Função é tudo que deve ser cumprido, desde uma tarefa até números".* Nitidamente observa-se como a noção que já possuíam, perpassa a noção que constroem do sobre o conceito matemático.

De acordo com Ponte (1992), as mudanças de concepções só se modificam mediante a abalos fortes nas concepções já existentes, algo que de acordo com o autor não acontece facilmente e sem resistência do sujeito. Mas há de se considerar também, que do ponto de vista matemático as aulas também possam estar sendo reforçada pelo tipo de tarefa que os estudantes normalmente executam quando estudam funções, isto é, muita conta e pouco reflexão sobre o contexto em que as funções foram originadas e a que servem e por fim sobre o que aquelas contas e variáveis representam,

Desse modo o estudo de funções, ainda hoje muito pautado em efetuar contas sem que essas contas preservem uma mínima relação com a situação que lhe deu origem, precisa ser visto, estudado, compreendido e modificado. Do contrário, o saber matemático que se pretende que o estudante desenvolva na escola nunca lhe será útil fora dela. É preciso fazer com que essas conexões ocorram, e esse segue sendo um desafio para professores e estudantes.

A nosso ver, uma possibilidade é de forma intencional trabalhar aspectos do conceito que parecem não chegam a ser percebidos pelos estudantes. Nossa aposta é na proposição de atividade que promovam reflexão e que ajudem a construir uma noção do conceito de função o mais próximo possível do seu significado matemático.

Vale ressaltar que durante o estudo observamos que as concepções de estudantes sobre conceitos são frequentemente investigadas nas áreas da Física, Química e Biologia, havendo ainda poucos estudos que tratem das concepções de estudantes sobre os conceitos matemáticos. Nesse sentindo, acreditamos que na área da Educação Matemática carecemos de estudos envolvendo essa temática. Dito isso, esperamos com esse estudo estarmos contribuindo para isso.

O fato do ensino da Matemática ainda hoje concentrar-se muito na solicitação do calcular em detrimento da ação do pensar, possivelmente contribui para essa "leitura" dos estudantes acerca do fazer matemático no ambiente escolar. A ação de calcular de fato perpassa o fazer matemático, mas este não se restringe a isso. Há que se pensar no ato reflexivo que deve acompanhar essa ação e que dará sentido ao que se faz.

Dito isso, o produto educacional pensado por nós contempla essa questão. Trata-se de um guia, que além sugerir, ao professor, um conjunto de atividades para serem realizadas com os estudantes, em sala de aula, também visa encaminhar o olhar do estudante para aspectos como o da relação entre duas grandezas e o da variação.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, L., REZENDE, W. (2007). **Um Breve Histórico do Conceito de Função**. Caderno Dá- Licença, pp. 64-75. Disponível em: < http://www.uff.br/dalicenca/index.php?option=com_content&view=article&id=10&Itemid=11>. Acesso em: 10 fev. 2016.

BRAGA, Ciro. **Função**: **a alma do ensino da Matemática**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRASIL. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.108p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Básico. **Parâmetros Curriculares do Ensino**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Edições Cosmos. 1951.

DANTE, L. R.; **Matemática**: contexto &aplicações/ Luiz Roberto Dante. 2. ed. São Paulo: Ática. 2013

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio**: o minidicionário da língua portuguesa dicionário. 7ª ed. Curitiba: Editora Positivo, 2008.

GUIMARAES, H. M. **Concepções, crenças e conhecimento** - afinidades e distinções essenciais. Revista Quadrante, Vol. XIX nº 2, 2010. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/11019/1/ConceptCrenConhec_Quadrante_pp81-102.pdf>. Acesso em: Mar. 2016.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Ed. Objetiva, 2004.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. e ALMEIDA, N. de. **Matemática ciência e aplicação 1º ano**. Ed. Saraiva, 2011.

KINDEL, D. S. **Um Ambiente Colaborativo a Distância**: licenciandos dialogando sobre os infinitos. 280 fls. Tese Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante. 2012.

LARROUSE CULTURAL. **Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Nova Cultural, 1992.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT)

LINS, R. C. **Por que discutir Teoria do Conhecimento é relevante para a Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Rio Claro: Editora UNESP, 1999. p. 75 – 94.

MATTA, A.; DE ALMEIDA SANTIAGO, R. C. C. **O contexto e sua relevância numa pesquisa Design-based research**. ARTEFACTUM-Revista de estudos em Linguagens e Tecnologia, v. 12, n. 1, 2016. Disponível em: < http://artefactum.rafrom.com.br/index.php/artefactum/article/view/926>. Acesso em: Fev. 2017.

MATTA, A.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. ***Design-based research* ou pesquisa de desenvolvimento**: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. Revista da FAEEBA: Educação e Contemporaneidade v. 23, n. 42, p. 23–36, 2014. Disponível em: <http://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/view/1025>. Acesso em: Ago. 2017.

MENDES, F. **Uma experiência de ensino centrada na multiplicação**: especificidades e desafios. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática, p. 29-31, 2014.

MOURÃO, Ana Paula. **A teoria da reificação de Anna Sfard**: O caso das funções. In: Ponte, J. P. et al (Orgs.) Actividade de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professore. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da SPCE (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação), 2002: pp. 275 – 289.

OLIVEIRA, P. C.; PIRES, R. F. **O conceito de função na Educação Básica via registros de representação semiótica**. Reflexão e Ação (Online), v. 20, p. 215-239, 2012. Disponível em: <https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/3038/2246>. Acesso em: Ago. 2017

PIRES, R. F. **Função:** Concepções de professores e estudantes dos ensinos Médio e Superior. Tese de doutorado em Educação Matemática, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

PIRES, R. F. ; MERLINI, V. ; MAGINA, S. M. P. . **Função**: Concepções manifestadas por um grupo de professores. Educação Matemática em Revista, v. 20, p. 21-29, 2015. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/431/pdf>. Acesso em: Fev. 2017.

PIRES, R. F. ; SILVA, B. **Função**: Concepção daquele que ensina e daquele que aprende. EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 5, p. 1-25, 2015. <http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/download/241/pdf_61>. Acesso: Fev. 2017.

PONTE, J. P. da. **Concepções dos professores de Matemática e processos de formação**. In M. Brown; D. Fernandes; J. F. Matos & J. P. Ponte, Educação Matemática: Temas de Investigação. Lisboa: IIE, 1992, p. 185-239.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n. 15, p. 3-9, 1990.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

REZENDE, Wanderley Moura ; PESCO, D. U. ; BORTOLOSSI, H. J. . **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, p. 74-89, 2012.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Mínimo Estadual:** Matemática. Rio de Janeiro, SEEDUC, 2012. 24p.

RUDIO, Franz Victor. **Introdução ao projeto de iniciação científica**. 34ª ed. Petrópolis. Editora Vozes, 2007.

SANTIAGO, R. C. C. de A., MATTA, A. E. R., da Silva, F. P. S (2016). **Metacognição**: Construindo conhecimento sobre a metodologia *Desing-based research*- DBR e sua utilização na educação a distância. Associação Brasileira de Educação à Distância – ABED – Congresso Internacional ABED de Educação a Distância – CIAED. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2016/trabalhos/63.pdf>. Acesso em: Ago. 2017.

SEGURADO, I.; PONTE, J. P. **Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo**. In: *Revista Quadrante*, Lisboa, Portugal, 7(2), 5-40, 1999. Disponível em: < https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3040/1/98-Segurado-Ponte%20%28Quadrante%29.pdf>. Acesso em: Fev. 2016.

SFARD, A. **Operational origins of mathematical objects and reification** – The case of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspect of epistemology and pedagogy, *MMA Notes* 25, p. 59 – 84, 1992.

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspect of epistemology and pedagogy, *MMA Notes* 25, p. 25 - 58, 1992.

SILVA, M. H. M., REZENDE, W. (2007). **Análise histórica do conceito de função**. Caderno Dá- Licença, pp. 29-33. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume2/Anlise_Histrica_do_Conceito_de_Funo.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2016.

SOUZA, V. M. ; MARIANI, V. C . **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função**. In: V EDUCERE, 2005, Curitiba. Anais...Curitiba. 2005. p. 1-12. Disponível em: < http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI021.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2017.

ZABALA, Antoni. **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. 2ª ed. Porto Alegre: Editora Artmed, 1999.

ZUFFI, E. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Educação Matemática em Revista, 8, no 9/10, abril, 2001. Biografia de James Gregory. Disponível em: <http://www.sobiografias.hpg.ig.com.br/JameGreg.html>. Acesso: Jul. 2017.